

BERICHTE  
AUS DEM  
INSTITUT FÜR MEERESKUNDE  
AN DER  
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT KIEL

NR. 102

DIE STRÖMUNGEN IN DER KIELER BUCHT

DOI 10.3289/IFM-BER-102

VON

SILKE STRUVE-BLANCK

Kopien dieser Arbeit können bezogen werden von:  
Institut für Meereskunde an der Universität Kiel  
Abteilung Theoretische Ozeanographie  
23/K i e l  
Düsternbrooker Weg 20

ISSN 0341-8561

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden in einem numerischen Modell die Strömungen in der Kieler Bucht aufgrund einer Windanregung berechnet.

Da das Strömungsverhalten der Kieler Bucht sowohl vom lokalen Wind als auch von der Reaktion des Systems Nordsee - Ostsee auf großräumige meteorologische Felder bestimmt wird, muß eine Modellierung den Einfluss des gesamten Systems beinhalten. Um andererseits die kleinskaligen Prozesse in der Kieler Bucht erfassen zu können, wurde ein Modell mit variabler horizontaler Auflösung entwickelt. Die Auflösung wird von 1,5 km in der Kieler Bucht auf 80 km in der nördlichen Ostsee verringert, die vertikale Auflösung beträgt vier Schichten. Das Modell ist ein Finite-Differenzen-Modell mit realistischer Bodentopographie im abgeschlossenen Becken.

Die Strömungen in den Belten werden mit zeitlich und räumlich konstanten Windanregungen für verschiedene Windrichtungen berechnet.

Der Volumentransport bzw. die mittlere Strömung der Kieler Bucht zeigt drei topographisch bedingte Wirbel, die je nach Strömungsrichtung in den Belten unterschiedliche Drehrichtung haben. Für Ostwind herrscht Ausstrom aus der Ostsee, für Westwind Einstrom, der quasi-stationäre Zustand wird schon nach etwa einem Tag erreicht. Bei Süd- und Nordwind wechseln Ein- und Ausstromlagen etwa drei Tage lang, bis sich für Südwind Einstrom und für Nordwind Ausstrom einstellt.

In einem weiteren Beispiel wird mit einem räumlich konstanten, zeitlich variablen Windfeld angeregt. Der während BALTIC'75 gemessene Wind bei Bornholm wird im gesamten Gebiet vorgegeben. Der Durchstrom durch die Belte stimmt mit gemessenen Werten in der Amplitude nicht befriedigend überein; die Ursache könnte in der unrealistischen räumlichen Konstanz des Windfeldes liegen. In dem Beispiel wird gezeigt, daß je nach Ausgangssituation ein bis drei Tage nötig sind, die "Vorgeschichte", z.B. einen aufgebauten Wasserstau in der Beltregion, auszugleichen.

## Summary

In the present paper the circulation in Kiel Bay caused by wind stress is numerically calculated.

The circulation in Kiel Bay depends on the local wind stress as well as the response of the North Sea and the Baltic to mesoscale meteorological fields. Therefore, the model has to take into account the influences of the North Sea and the Baltic. On the other hand small-scale processes in Kiel Bay have to be resolved. These requirements can be fulfilled by using a numerical model with variable resolution. The resolution in the horizontal decreases from  $1.5 \times 1.5$  km in Kiel Bay to  $80 \times 60$  km in the northern Baltic and in the North Sea; the vertical variability is modeled by four layers. The model uses finite-differences and consists of a closed basin with realistic topography and realistic horizontal boundaries.

The circulation in Kiel Bay is calculated using wind speeds which are constant in space and time, and different wind directions.

The mass transport in Kiel Bay exhibits three topographic eddies, which change their sign when the direction of the velocity in the Belts changes. Easterly winds produce an outflow from the Baltic to the Kattegat, westerly winds an inflow. After about one day the flow becomes quasi-stationary. With southerly and northerly winds the flow in the Belts changes its sign several times during the first three days, afterwards we have inflow with southerly winds and outflow with northerly winds.

Another example shows how the flow is induced by a wind constant in space and variable in time, using the wind measured at Bornholm during BALTIC'75. The transport in the Belts is smaller compared with measured transport rates; one reason for this could be the unrealistic spatial constancy of the forcing wind. It takes between one and three days to reduce the differences in sea level and velocity due to earlier meteorological situations.

# INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Einleitung	1
2. Das barotrope Modell	4
2.1. Die Koordinatentransformation	8
2.2. Das Gleichungssystem für das barotrope Modell	11
2.3. Die numerische Behandlung des Gleichungssystems	14
2.3.1. Spezielle Probleme bei der Behandlung des transformierten Gleichungssystems	14
2.3.2. Das Gitter	16
2.3.3. Der horizontale Austauschkoeffizient	19
2.3.4. Zeitliche Diskretisierung und Stabilitätsbetrachtung	20
3. Das barokline Modell	26
3.1. Das Gleichungssystem	26
3.1.1. Die Zustandsgleichung	27
3.1.2. Die Erhaltungsgleichung für die Partialmasse $\varrho \cdot s$	29
3.1.3. Das Gleichungssystem für die einzelnen Schichten	29
3.2. Die numerische Behandlung des baroklinen Gleichungssystems	32
3.2.1. Das Gleichungssystem in der Form, in der es numerisch integriert wird	36
3.2.2. Abschätzung des Zeitschrittes für die Berechnung der internen Bewegung	40
3.2.3. Stabilitätsbetrachtung für die vertikale Diskretisierung	40
3.2.4. Der Deformationsradius	42

	Seite
4. Modellrechnungen	43
4.1. Parameterwahl und Anfangszustand	43
4.2. Modellanwendungen	45
4.2.1. Ergebnisse im grob aufgelösten Gebiet	64
4.2.2. Einfluß der Topographie	74
4.2.3. Einfluß der Baroklinität	78
4.2.4. Vergleich von Ergebnissen des numerischen Modelles für idealisierte Windfelder mit empirisch gewonnenen Zusammenhängen zwischen Wind und Strom	85
4.2.5. Untersuchung über Durchstrommengen durch den Großen Belt	94
4.2.6. Untersuchung über Einstellzeiten	99
5. Zusammenfassung und Schlußbetrachtung	108
6. Benutzte Programme	109
7. Literaturverzeichnis	110

## 1. EINLEITUNG

Die Kieler Bucht ist ein verhältnismäßig flaches Gebiet der Beltsee von etwa 18 m Tiefe, nur in den Rinnen beträgt die Tiefe bis zu 30 m. Sie wird begrenzt von der schleswig-holsteinischen Ostküste und den dänischen Inseln.

Vor 8000 Jahren war hier noch Festland, durch die Beltregion führte lediglich ein Fluß vom damaligen Süßwassersee Ancylussee in die Nordsee, der für das ausgeprägte Rinnensystem in der Beltsee verantwortlich ist. Erst als vor 7000 Jahren durch den Anstieg des Weltmeeresniveaus und gleichzeitiger Absenkung des Gebietes der westlichen Ostsee ein Salzwassereinbruch erfolgte, wurde das Gebiet der heutigen Beltsee gebildet mit den drei Durchlässen für den Wasseraustausch zwischen Nord- und Ostsee, dem Großen Belt, dem Kleinen Belt und dem Sund (DIETRICH und KÜSTER, 1974). Der größte Teil des Wasseraustausches findet durch den Großen Belt und dem daran anschließenden Fehmarnbelt statt, etwa  $\frac{2}{3}$  des Gesamtwasseraustausches (JACOBSEN, 1980). Die Wasserbewegung in der angrenzenden Kieler Bucht wird deshalb einerseits bestimmt von den lokalen Kräften, wie dem lokalen Wind über der Kieler Bucht, überwiegend jedoch von den dynamischen Vorgängen in ihren Zugängen, dem Großen Belt und dem Fehmarnbelt; der Kleine Belt ist weniger wichtig, durch ihn fließen nur ca. 13 % der Durchflußmenge des Großen Beltes (JACOBSEN, 1980).

Die Dynamik in der Beltsee wird gesteuert von den großräumigen meteorologischen Feldern im Bereich Nordsee-Ostsee, die eine Skala von einigen Tagen haben. Wegen der komplizierten Topographie und Randkonfiguration in der Beltregion treten Stauwirkungen auf, die die direkte Wirkung des Windes bei weitem übertreffen können. Insofern ist neben der momentanen meteorologischen Situation die Vorgeschichte wichtig.

Die Gezeitenströmungen sind verhältnismäßig klein, im Fehmarnbelt von der Größenordnung 3 cm/sec, im Großen Belt 6 cm/sec (THIEL, 1943), doch in stromschwachen Lagen machen auch sie

sich bemerkbar. Beeinflußt werden die Strömungen der Kieler Bucht auch durch die Eigenschwingungen der Ostsee. Quantitative Angaben sind jedoch nicht bekannt, das gilt auch für evtl. angeregte selbständige Eigenbewegungen der Kieler Bucht.

Die Oberlagerung all dieser Effekte läßt keinen einfachen Zusammenhang zwischen Wind und Strömung vermuten. Vielmehr ist die Beltregion und damit die Kieler Bucht durch ständig wechselnde Ein- und Ausstromlagen gekennzeichnet. Dabei reagiert die vertikale Wassersäule durchaus nicht gleichförmig, besonders im Sommer bei starker Schichtung treten im Fehmarnbelt wie im Großen Belt oft Situationen mit unterschiedlicher Strömungsrichtung an der Oberfläche und am Boden auf.

In der Literatur sind verschiedene Versuche unternommen worden, typische Zirkulationen in der Kieler Bucht herauszuarbeiten, wobei der Einfluß der Dynamik in der Beltregion auf die Kieler Bucht berücksichtigt wurde. Als erster versucht KOHLMANN (1905), eine Gesetzmäßigkeit zwischen der Durchflußrichtung durch die Belte und der Strömung in der westlichen Kieler Bucht zu finden. Dabei stößt er auf scheinbar widersprüchliches Beobachtungsmaterial. MACHENS (1949) stellt aus Beobachtungen an fünf Stationen in der Kieler Bucht vier typische Strömungslagen dar und stellt deren Zusammenhang mit der meteorologischen Lage her. 70 % seiner 59-tägigen Messungen lassen sich in diese vier Schemata einordnen. Alle Autoren hatten lediglich punktweise Messungen zur Verfügung. Deshalb ist es schwierig, ein synoptisches Bild der Kieler Bucht zu erhalten, da - wie Triftkörpermessungen und Satellitenaufnahmen bestätigen - das Strömungsfeld durch z.T. kleinräumige Wirbel gekennzeichnet ist (HORSTMANN und HARDTKE, 1981). LI (1977) berechnete als erster ein synoptisches Bild der Strömungssituation in der Kieler Bucht.

Über die Häufigkeit des Auftretens einzelner Strömungslagen in der Kieler Bucht kann man nur Aussagen machen, wenn man die Verteilung der Ein- und Ausstromsituationen in der Beltregion

kennt. Mit dem Wasseraustausch zwischen Nord- und Ostsee haben sich viele Autoren auseinandergesetzt. Eine ausführliche Zusammenfassung der existierenden Literatur zu diesem Thema befindet sich bei JACOBSEN (1980). DIETRICH (1951) stellt einen statistischen Zusammenhang zwischen den Tagesmittelwerten der Oberflächenströmung und dem Wind am Feuerschiff Fehmarnbelt her. WYRTKI (1953, 1954) berechnet die Durchflußmengen durch den Fehmarnbelt mit einem eindimensionalen Modell. LANGE (1974) stellt eine lineare Beziehung zwischen dem Wassertransport durch den Fehmarnbelt und dem Wind über der westlichen Ostsee her. KOVALIK (1976) verbindet in einem numerischen Modell zwei Becken von der Größenordnung der Nord- und Ostsee durch einen Kanal, um die Durchflußmengen für einen definierten Wind zu berechnen. JACOBSEN (1980) interpretiert in seinem Bericht über das Dänische Beltprojekt das umfangreiche Datenmaterial zur Bestimmung des Seewasseraustausches zwischen Nord- und Ostsee.

In der vorliegenden Arbeit soll die Reaktion der Kieler Bucht auf großräumige Windlagen berechnet werden. Es wird ein numerisches Mehrschichtenmodell der Kieler Bucht entwickelt, das einerseits dem großräumigen meteorologischen Einfluß gerecht wird, indem es das gesamte bestimmende Gebiet Nord-Ostsee enthält, andererseits aber im Bereich der Kieler Bucht eine genügend gute Auflösung besitzt.



## 2. DAS BAROTROPE MODELL DER KIELER BUCHT

Wollte man den großräumigen meteorologischen und ozeanographischen Einfluß auf die Kieler Bucht simulieren, indem man in den Belten offene Ränder formulierte, so würde man auf große Schwierigkeiten stoßen. Die Dynamik in den Belten ist, wie in der Einleitung beschrieben, fast genauso unbekannt wie die der Kieler Bucht, so daß man schon aus physikalischen Gründen Probleme hätte, Volumentransporte vorzugeben, die zu allen Zeitpunkten mit der jeweiligen Wirkung des Windes und dem produzierten Wasserstau verträglich sind. Hinzu kommen noch die mathematischen Schwierigkeiten, besonders in dem später zum baroklinen Modell erweiterten Fall (KIELMANN, 1981).

Es soll deshalb das gesamte Gebiet Ostsee-Beltsee-Kattegat-Skagerrak-Nordsee als abgeschlossenes Becken betrachtet werden. Die Nordsee zum Atlantik abzuschließen, ist angemessen, da die Nordsee auf das Modell der Beltsee im wesentlichen als Wasserreservoir dient und unrealistische Bedingungen am Übergang Atlantik-Nordsee keine Auswirkungen auf die Verhältnisse in der Beltsee haben.

Die zweite Forderung besteht darin, in der Kieler Bucht eine genügend gute Auflösung zu erhalten. Auf Satellitenbildern sieht man in der Kieler Bucht und in den Belten eine mehr oder weniger ausgeprägte Wirbelstruktur (HORSTMANN und HARDTKE, 1981). Die Wirbel im Inneren haben einen Durchmesser von ca. 7 - 25 km, die Ablösewirbel am Rand sogar nur ca. 5 km. Zumindest im Inneren sollte die Wirbelstruktur aufgelöst werden, Randeffekte dieser Größenordnung sind wegen der Vorgabe von vereinfachenden Randbedingungen (non slip) ohnehin schwer aufzulösen. Deshalb, und aus den Skalen in früheren Modellen (LI, 1977), wird auf eine notwendige Auflösung von 1 - 2 km geschlossen. Das gesamte betrachtete Gebiet mit dieser Auflösung zu rechnen, würde die Kapazität verfügbarer Computer überschreiten, deshalb wird eine kontinuierlich gestreckte Auflösung eingeführt. Die Streckung hat ihr Zentrum in der Kieler Bucht, die

Auflösung wird von 1,5 km auf max. 63 bzw. 75 km in der Nord- bzw. Ostsee kontinuierlich verringert.

Ein gestrecktes Modell wird einem genesteten Modell vorgezogen, da in genesteten Modellen beim Übergang von einem Gitter zum anderen Probleme mit Wellenreflektionen und Phasensprüngen auftreten (SIMONS, 1976; SUNDSTRÖM und ELVIUS, 1979). Die gleichen Probleme treten in gestreckten Gittern prinzipiell auch auf, doch ist hier die Erzeugung "falscher" Wellen auf einen Übergangsbereich bzw. das gesamte Gebiet verteilt und es wird erwartet, daß durch eine kontinuierliche Dämpfung die Probleme weitgehend behoben werden können. STANFORTH und MITCHELL erhalten in einem kontinuierlich gestreckten Gitter bessere Ergebnisse als mit einem Sprung in der Auflösung (STANFORTH und MITCHELL, 1978).

Das betrachtete Gebiet reicht von  $4^{\circ}$  West bis  $29^{\circ}$  Ost und von  $53^{\circ}$ N bis  $66^{\circ}$ N. Es wird in stereographischer Projektion mit dem tangentialen Berührungspunkt bei  $54,5^{\circ}$ N,  $11^{\circ}$ O dargestellt und hat in  $x'$ -Richtung eine Länge von 1863 km und in  $y'$ -Richtung von 1626 km. Die Tiefen werden Seekarten entnommen, auf das Gitter interpoliert und zweimal übergreifend gemittelt mit den Gewichten  $1/4 - 1/2 - 1/4$ .

In Abb. 1 ist das betrachtete Gebiet dargestellt. Auf die eingezeichneten Schnitte und die Feuerschiffe wird in Abschnitt 4 Bezug genommen. Die in Abb. 1 gepunktet hervorgehobene Region ist in Abb. 2 noch einmal größer und mit Bodentopographie dargestellt.

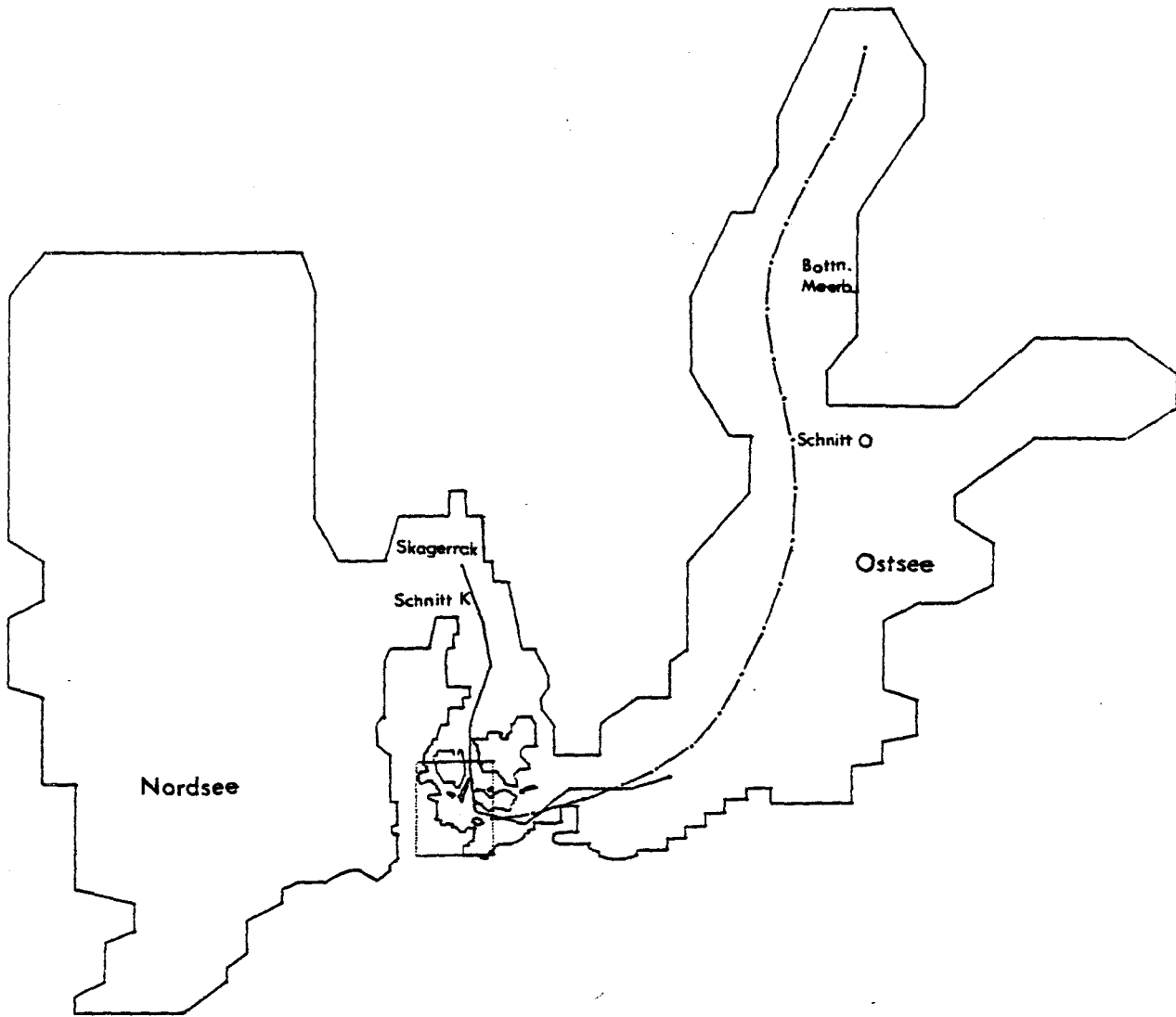


Abb. 1:

Betrachtetes Meeresgebiet

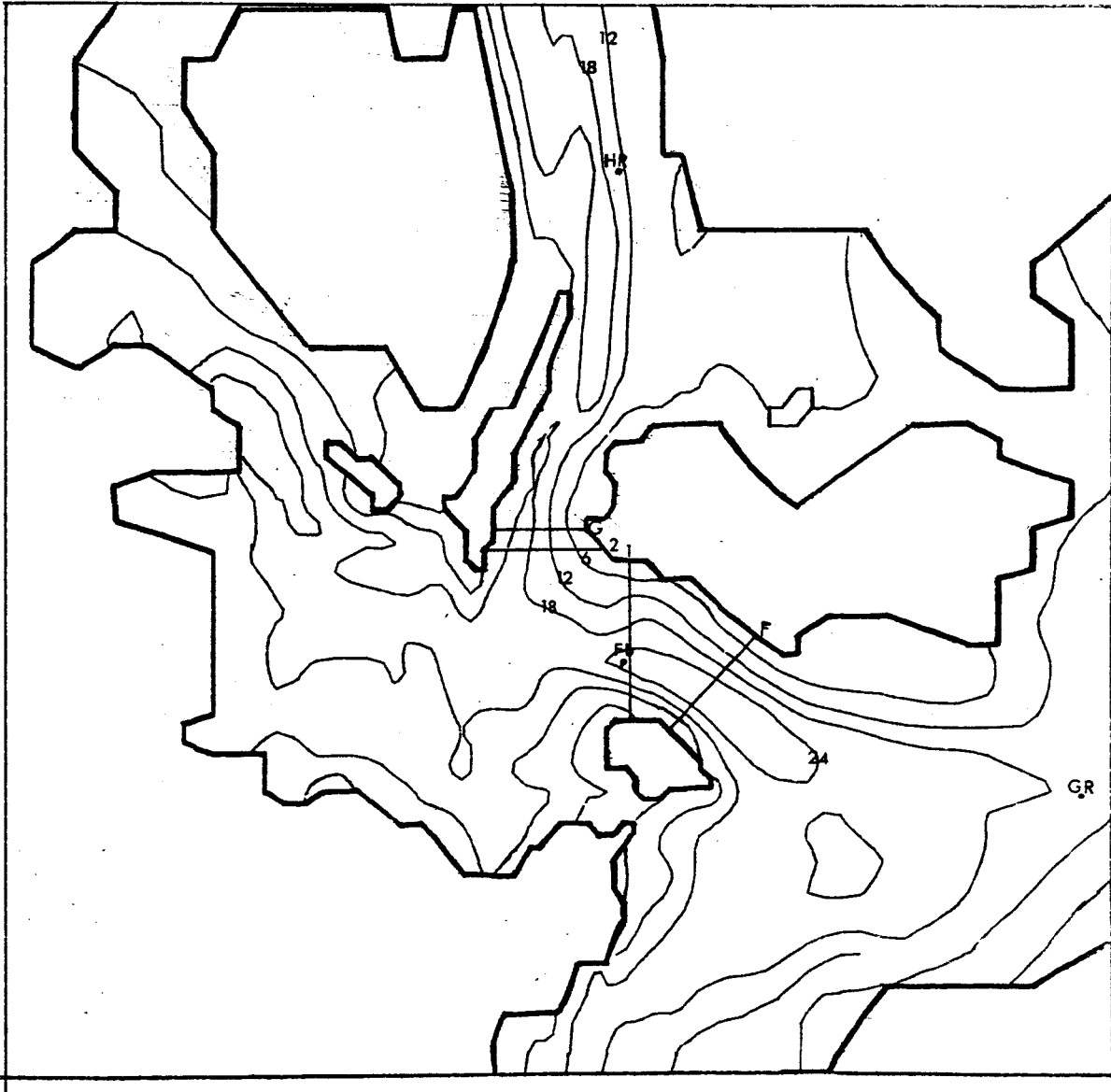


Abb. 2:

**Kieler Bucht**

HR Feuerschiff Halskov Rev

Fb Feuerschiff Fehmarnbelt

GR Feuerschiff Gedser Rev

## 2.1. DIE KOORDINATENTRANSFORMATION

Eine kontinuierliche Auflösung kann man durch ein kontinuierlich variiertes Gitter oder durch eine kontinuierlich "streckende" Koordinatentransformation erreichen. Hier wird eine Koordinatentransformation vorgenommen und die transformierten Gleichungen werden in einem äquidistanten Gitter diskretisiert. Gegenüber einem variablen Gitter hat diese Methode den Vorteil, daß der Grad des Diskretisationsfehlers (truncation error) erhalten bleibt, es wird also eine bessere Genauigkeit der Approximation des Differentialausdruckes (accuracy) erwartet (KALNAY DE RIVAS, 1972; ROACHE, 1976). Es werden  $x'$ - und  $y'$ -Koordinate transformiert, und zwar so, daß das System orthogonal bleibt.

Die Transformationsgleichung für  $x'$  lautet:

$$x' = \sum_{i=0}^5 A_i x^i \quad (1)$$

$x'$ -Koordinate im physikalischen System

$x$  -Koordinate im transformierten System.

$$\Rightarrow \frac{\partial x'}{\partial x} = B(x) = \sum_{i=1}^5 i \cdot A_i x^{i-1}$$

Die Differentialausdrücke transformieren sich zu:

$$\frac{\partial}{\partial x'} \rightarrow \frac{1}{B(x)} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \rightarrow \frac{1}{B(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{B(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (3)$$

Die Transformationsgleichung für  $y'$  lautet analog:

$$y' = \sum_{i=0}^5 B_i y^i \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y'} \rightarrow \frac{1}{B(y)} \frac{\partial}{\partial y} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y'^2} \rightarrow \frac{1}{B(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{B(y)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (6)$$

Das Zentrum der Streckung, d.h. der Ort, an der  $B(x)$  und  $B(y)$  ihr Minimum erreichen, liegt bei  $11^{\circ} 0,54' 36''$  N. Die Transformationsgleichungen sind in Abb. 3a graphisch dargestellt. Um die Größenordnung der Streckung bzw. die Auflösung in den verschiedenen Regionen des Gesamtbereiches zu verdeutlichen, ist in Abb. 3b für die  $x'$ -Komponente der Gitterabstand in der physikalischen Skala:  $Dx' = Dx \cdot B(x)$  über die physikalische Skala  $x'$  aufgetragen.

Für die Gleichungen (1) und (4) werden folgende Koeffizienten benutzt:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= DM + A \cdot C^4 & \text{mit } C &= RN \cdot 5 / (DN + 4DM) \\
 A_2 &= -2 \cdot A \cdot C^3 & A &= (DN - DM) / C^4 \\
 A_3 &= 2 \cdot A \cdot C^2 & RN &= 905,5 \quad (\text{Abstand westl. Rand-Zentrum in km}) \\
 A_4 &= -A \cdot C & DN &= 68 \quad (B(x) \text{ am westl. Rand}) \\
 A_5 &= \frac{A}{5} & DM &= 1,5 \quad (B(x)_{\min}) \\
 B_1 &= DM + AY \cdot CY^4 & \text{mit } CY &= RNY \cdot 5 / (DNY + 4DM) \\
 B_2 &= -2 \cdot AY \cdot CY^3 & AY &= (DNY - DM) / CY^4 \\
 B_3 &= 2 \cdot AY \cdot CY^2 & RNY &= 396 \quad (\text{Abstand südl. Rand-Zentrum, in km}) \\
 B_4 &= -AY \cdot CY & DNY &= 33,5 \quad (B(y) \text{ am südl. Rand}) \\
 B_5 &= \frac{AY}{5} & DM &= 1,5 \quad (B(y)_{\min})
 \end{aligned}$$

Die  $z$ -Koordinate wird nicht transformiert.

Bei der angegebenen Transformation ergeben sich für das gesamte betrachtete Meeresgebiet 6458 Gitterpunkte, davon entfallen 3214 Punkte auf die Beltsee, 1467 Punkte auf die eigentliche Kieler Bucht.

Die obige Streckung wurde getestet, indem einmal das Gleichungssystem untransformiert, zum anderen das Gleichungssystem transformiert mit einer Steigung, die der obigen entspricht, in gleich großen rechteckigen Becken gelöst wurde. Der Vergleich ergab nach 174 Zeitschritten nahezu identische Strömungsbilder.

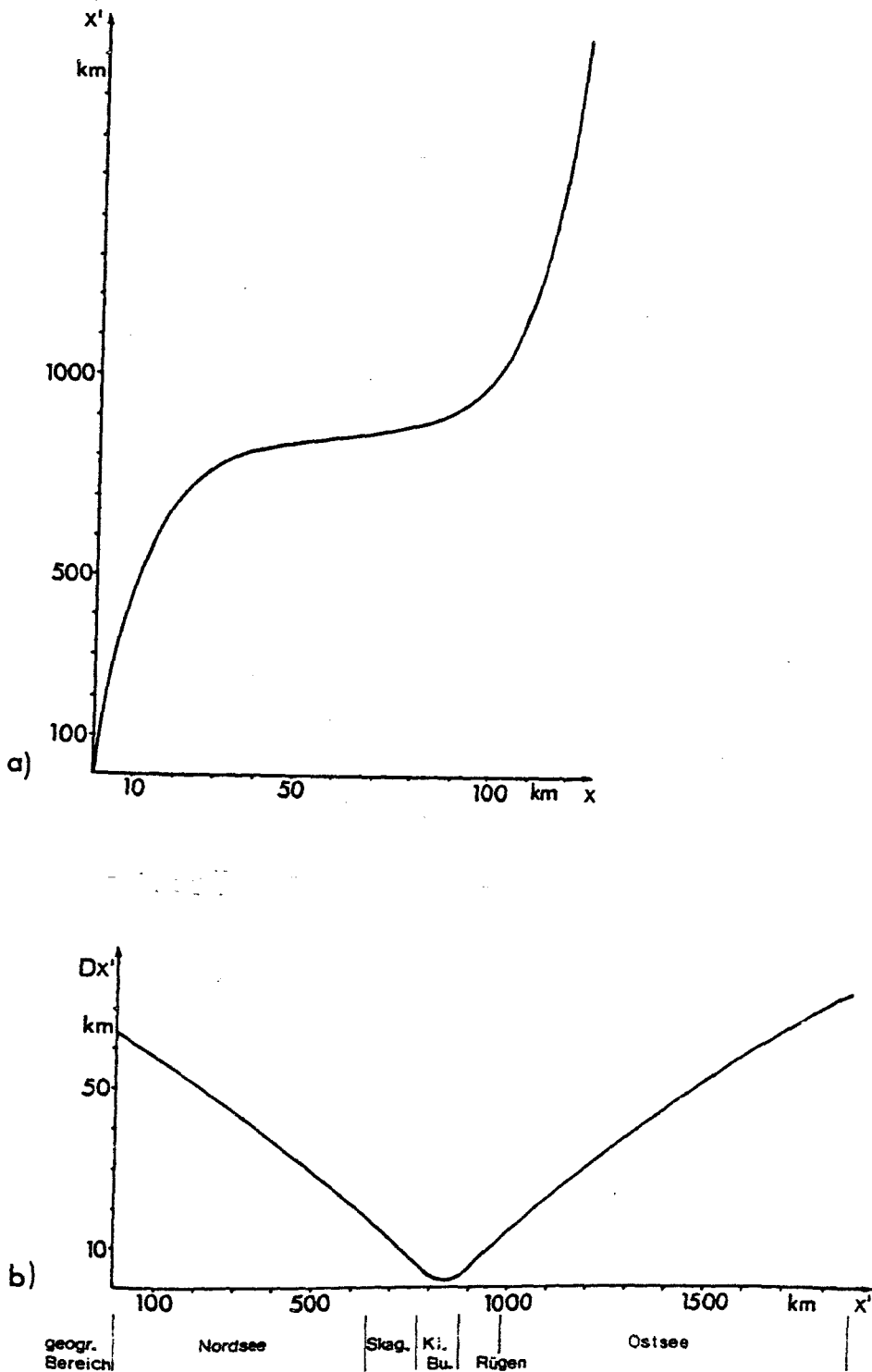


Abb. 3:

- a) Transformation vom physikalischen System  $x'$  in das transformierte System  $x$
- b) Gitterabstand  $Dx' = Dx \cdot B(x)$  in Abhängigkeit von der physikalischen Skala  $x'$ .

## 2.2. DAS GLEICHUNGSSYSTEM FÜR DAS BAROTROPE MODELL

Benutzt werden die primitiven Gleichungen in kartesischen Koordinaten auf der f-Ebene; die advektiven Terme in den Bewegungsgleichungen werden vernachlässigt, die Boussinesq-Approximation wird eingeführt und die dritte Bewegungsgleichung wird durch die hydrostatische Gleichung ersetzt. Im barotropen Fall gilt die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten. Vernachlässigt man außerdem die molekularen Flüsse und ersetzt die turbulenten Flüsse mit Hilfe des Austauschkonzepts, so folgt (KRAUSS, 1973):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x'} - f v - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (A \nabla u) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y'} + f u - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (A \nabla v) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g \rho \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

Koordinatensystem: Rechtssystem mit  $x'$  nach Osten,  $y'$  nach Norden und  $z$  nach oben

Bezeichnungen: Standardbezeichnungen, nur gestrichene Größen für die Koordinaten  $x'$  und  $y'$   
für alle Größen außer  $f$  und  $\rho = \rho_0 = \text{const.}$  gilt:  
 $\psi = \psi(x', y', z, t)$

A-Austauschkoeffizient für Impuls

Dieses System von Differentialgleichungen wird vertikal integriert. Dabei werden folgende Definitionen und Ableitungen benutzt:

$A_h$  - horizontaler Austauschkoefizient für Impuls

$A_v$  - vertikaler Austauschkoefizient für Impuls

$$u = \int_{-H}^{\eta} u \, dz$$

$$V = \int_{-H}^{\eta} v \, dz \quad .$$



Aus Gleichung (9) folgt für  $g = g_0 = \text{const.}$ :

$$\int_z^{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} dz = - \int_z^{\gamma} g g_0 dz \Rightarrow p(z) - p_L = g g_0 (\gamma - z) \quad (11)$$

$$\Rightarrow \int_{-H}^{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x'} dz = \int_{-H}^{\gamma} \left( \frac{\partial p_L}{\partial x'} + g g_0 \frac{\partial \gamma}{\partial x'} \right) dz = g g_0 (H + \gamma) \frac{\partial}{\partial x'} \left( \gamma + \frac{p_L}{g g_0} \right)$$

$$\int_{-H}^{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y'} dz = g g_0 (H + \gamma) \frac{\partial}{\partial y'} \left( \gamma + \frac{p_L}{g g_0} \right)$$

Unter Benutzung der Vertauschungsregel von Differentiation und Integration und der Gleichung (11) folgt aus Gleichung (7), (8) und (10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -g (H + \gamma) \frac{\partial}{\partial x'} \left( \gamma + \frac{p_L}{g g_0} \right) + fV + \frac{1}{g_0} \frac{\partial}{\partial x'} \left( Ah \frac{\partial u}{\partial x'} \right) + \frac{1}{g_0} \frac{\partial}{\partial y'} \left( Ah \frac{\partial u}{\partial y'} \right) - \\ & \frac{Ah}{g_0} \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \gamma}{\partial x'} \Big|_{\gamma} - \frac{Ah}{g_0} \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \gamma}{\partial y'} \Big|_{\gamma} + \frac{Av}{g_0} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\gamma} - \frac{Ah}{g_0} \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial H}{\partial x'} \Big|_{-H} - \frac{Ah}{g_0} \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial H}{\partial y'} \Big|_{-H} - \frac{Av}{g_0} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{-H} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & -g (H + \gamma) \frac{\partial}{\partial y'} \left( \gamma + \frac{p_L}{g g_0} \right) - fU + \frac{1}{g_0} \frac{\partial}{\partial x'} \left( Ah \frac{\partial v}{\partial x'} \right) + \frac{1}{g_0} \frac{\partial}{\partial y'} \left( Ah \frac{\partial v}{\partial y'} \right) - \\ & \frac{Ah}{g_0} \frac{\partial v}{\partial x'} \frac{\partial \gamma}{\partial x'} \Big|_{\gamma} - \frac{Ah}{g_0} \frac{\partial v}{\partial y'} \frac{\partial \gamma}{\partial y'} \Big|_{\gamma} + \frac{Av}{g_0} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{\gamma} - \frac{Ah}{g_0} \frac{\partial v}{\partial x'} \frac{\partial H}{\partial x'} \Big|_{-H} - \frac{Ah}{g_0} \frac{\partial v}{\partial y'} \frac{\partial H}{\partial y'} \Big|_{-H} - \frac{Av}{g_0} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{-H} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x'} - u \frac{\partial \gamma}{\partial x'} \Big|_{\gamma} - u \frac{\partial H}{\partial x'} \Big|_{-H} + \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial \gamma}{\partial y'} \Big|_{\gamma} - v \frac{\partial H}{\partial y'} \Big|_{-H} + w \Big|_{\gamma} - w \Big|_{-H} = 0 \quad (14)$$

Die Randbedingungen lauten:

kinematische Grenzflächenbedingungen:

$$w = u \frac{\partial \gamma}{\partial x'} + v \frac{\partial \gamma}{\partial y'} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad \text{für } z = \gamma \quad (15)$$

$$w = -u \frac{\partial H}{\partial x'} - v \frac{\partial H}{\partial y'} \quad \text{für } z = -H \quad (16)$$

dynamische Grenzflächenbedingungen:

$$A_V \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_{\sigma}^{(x)} \quad \text{für } z = \zeta \quad (17)$$

$$A_V \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_{\sigma}^{(y)} \quad \text{für } z = \zeta \quad (18)$$

$$A_V \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_{\beta}^{(x)} \quad \text{für } z = -H \quad (19)$$

$$A_V \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_{\beta}^{(y)} \quad \text{für } z = -H \quad (20)$$

Setzt man die Randbedingungen (15) - (20) in die Gleichungen (12) - (14) ein und führt man die Koordinatentransformation, wie sie in Abschnitt 2.1., Gleichungen (2), (3), (5) und (6), beschrieben ist, ein, so folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g(H+\zeta)}{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta + \frac{p_L}{g\beta} \right) + fV + \frac{1}{g_0 \beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A_h}{\beta(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{g_0 \beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A_h}{\beta(y)} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\tau_{\sigma}^{(x)}}{g_0} - \frac{\tau_{\beta}^{(x)}}{g_0} \quad (21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{g(H+\zeta)}{\beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta + \frac{p_L}{g\beta} \right) - fU + \frac{1}{g_0 \beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A_h}{\beta(x)} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{g_0 \beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A_h}{\beta(y)} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\tau_{\sigma}^{(y)}}{g_0} - \frac{\tau_{\beta}^{(y)}}{g_0} \quad (22)$$

$$\frac{1}{\beta(x)} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\beta(y)} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (23)$$

Dabei sind die horizontalen Reibungsterme an der Oberfläche und am Boden der Gleichungen (12) und (13) in den horizontalen Austauschtermen mit parameterisiert (KRAUSS, 1973).

An den horizontalen Rändern wird die non slip Bedingung angenommen.

Für den Oberflächenstress  $\tau_0$  wird folgender Ansatz gemacht:

$$\tau_0^{(x)} = c_D \cdot \rho_L \cdot u_W^2$$

$$\tau_0^{(y)} = c_D \cdot \rho_L \cdot v_W^2$$

mit  $c_D = 1,2 \cdot 10^{-3}$  (z.B. KRAUSS, 1973)

$\rho_L = 1,225 \cdot 10^{-3}$  cgs, Dichte der Luft

$u_W$  = u-Komponente der Windgeschwindigkeit in  
10 m Höhe

$v_W$  = v-Komponente der Windgeschwindigkeit

Die Bodenreibung sei proportional zu dem Quadrat der Geschwindigkeit am Boden (z.B. SONDERMANN, 1966):

$$\tau_B(x) = r \cdot \bar{u} \cdot \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$$

BRETTSCHEIDER bestimmt  $r$  zu  $r = 1,8 \cdot 10^{-3}$  bis  $r = 9,3 \cdot 10^{-3}$  cgs (BRETTSCHEIDER, 1967). Gleiche Größenordnungen finden auch KIELMANN und KOVALIK (1980).

## 2.3. DIE NUMERISCHE BEHANDLUNG DES GLEICHUNGSSYSTEMS

### 2.3.1. Spezielle Probleme bei der Behandlung des transformierten Gleichungssystems

Das Gleichungssystem (21) - (23) soll mit einem expliziten Finite-Differenzen-Verfahren numerisch gelöst werden. Da alle Differenzenverfahren numerische Fehler bezüglich Dispersion, Dämpfung, Gibb'scher Phänomene und evtl. "Geisterlösungen" (computational modes) haben, gilt es, Verfahren und Gitter zu benutzen, die der im Einzelfall zu beschreibenden Physik angemessen sind.

Das vorliegende Gleichungssystem (21) - (23) ist mathematisch ein System mit variablen Koeffizienten, physikalisch repräsentiert es eine von  $x'$  und  $y'$  abhängige Auflösung. Da alle numerischen Fehler von der Skala der simulierten Vorgänge und dem Gitterabstand abhängen, werden also in diesem Fall die numerischen Fehler im gesamten Bereich differieren.

Die Auswirkung von Dispersionsfehlern zeigen BROWNING, KREISS und OLIGER (1973). Sie haben an einem einfachen Beispiel untersucht, wie sich die Fortschritts-geschwindigkeit einer Welle, die der Differentialgleichung  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}$  entspricht, durch die Diskretisierung ändert. Sie approximieren die Gleichung durch zentrale Differenzen in Zeit und Raum. Die Geschwindigkeit ändert sich von  $c=1$  für die exakte Lösung zu  $c = \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{N}\right)^2}$  für die numerische Lösung, wobei  $N$  die Anzahl der Gitterpunkte pro Wellenlänge bezeichnet. Kurze Wellen haben eine größere Abweichung von der

exakten Phasengeschwindigkeit als längere Wellen. Das führt zu einem Auseinanderlaufen eines Wellenpaketes. In einem variablen Gitter ist für jede Welle die Anzahl  $N$  der Gitterpunkte pro Wellenlänge ortsabhängig. Das heißt, daß eine Welle beim Übergang vom gröberen in Richtung feineres Gitter seine Geschwindigkeit vergrößert und bei einer Laufrichtung vom feineren zum gröberen Gitter seine Geschwindigkeit verringert. Von einem bestimmten Gitterabstand an kann die Welle in den grob aufgelösten Bereich gar nicht mehr hineinlaufen; sie wird dann reflektiert. Diese Probleme können zu schwerwiegenden Fehlinterpretationen führen, wie die Autoren in einem weiteren Beispiel anhand eines zweidimensionalen Problems zeigen. Durch Interferenz der verschieden modifizierten Wellen entsteht ein irreführendes Bild, das man als ein durch ein Gebiet variierender Dichte wanderndes Wellenfeld interpretieren könnte.

Benutzt man ein Verfahren, in dem "computational modes" auftreten - "computational modes" sind gitterproduzierte Wellen der Wellenlänge  $2 \cdot D_s$ , wobei  $D_s$  der Gitterabstand ist - , sollte man sie möglichst effektiv wegdamphen. Diese Wellen können in ein gröber aufgelöstes Gebiet nicht hineinlaufen, sie werden reflektiert und laufen im feineren Gitter hin und her und führen somit zu Interferenz mit den physikalischen Wellen (MATSUNO, 1966).

Phasenfehler lassen sich in einem Finite-Differenzen-Verfahren nicht ausschalten, doch sollte man im Falle einer variierenden Auflösung bemüht sein, ein Verfahren mit möglichst gutem Phasenverhalten zu benutzen.

Die Dämpfung nimmt mit zunehmender Gitterweite ebenfalls zu, das bedeutet in unserem Fall, daß kleinskalige Signale aus dem fein aufgelösten Gebiet im grob aufgelösten Gebiet stärker gedämpft werden. Da jedoch der großräumige Effekt auf ein kleineres Gebiet untersucht werden soll, sind kleinskalige Signale aus dem kleinen Gebiet wenig bedeutend für die Verhältnisse im Gesamtgebiet. Von der stärkeren Dämpfung in den grob aufgelösten Gebieten sind also keine zusätzlichen Schwierigkeiten zu erwarten.

Aus den oben genannten Schwierigkeiten werden die Folgerungen gezogen:

1. Es sollte ein Verfahren mit gutem Phasenverhalten benutzt werden.
2. Das Gitter sollte auf die Erzeugung von "computational modes" untersucht werden.
3. Die Dämpfung außerhalb des fein aufgelösten Bereiches sollte so groß gewählt werden, daß die kurzen Wellen der Größenordnung  $2 \cdot \Delta x$  weggedämpft werden.

### 2.3.2. Das Gitter

MESINGER und ARAKAWA (1976) untersuchen verschiedene Gitter und deren Auswirkungen auf reine Schwerewellen, als auch auf Schwerewellen mit Trägheitseinfluß. Reine Schwerewellen haben die Phasengeschwindigkeit  $c = \sqrt{g \cdot H}$ , sind also dispersionsfrei. Diskretisiert man die räumliche Ableitung einer eindimensionalen reinen Schwerewelle, z.B. durch zentrale Differenzen, indem man die Variablen  $u$  und  $\zeta$  an den gleichen Gitterpunkten nimmt, so folgt  $c = \sqrt{g \cdot H} \frac{\sin(\kappa \cdot \Delta x)}{\kappa \cdot \Delta x}$  mit  $\kappa$  - Wellenzahl,  $\Delta x$  - Gitterabstand; die Wellen werden also dispersiv.

Durch ein versetztes Gitter (staggered grid) kann man die gitterbedingte Dispersion wesentlich verringern, jedoch nicht völlig vermeiden.

Für 2-dimensionale reine Schwerewellen wird ein Gitter - wie in Abb. 4 dargestellt - als das beste erkannt. Die räumlichen Differenzenquotienten werden hier zentral genommen.

Zwar gibt es in der Literatur verschiedene Methoden, den Dispersionsfehler durch Korrekturmechanismen zu reduzieren, sie sind jedoch durchweg sehr aufwendig und erfordern meist mehrere Rechenschritte und zusätzliche Speicherkapazitäten, sie scheiden für dieses Modell deshalb aus (BORIS und BOOK, 1976; FROMM, 1968). Für Schwerewellen mit Trägheitseinfluß hat das umseitig genannte Gitter C den Nachteil, daß der Coriolisterm einige Schwierigkeiten

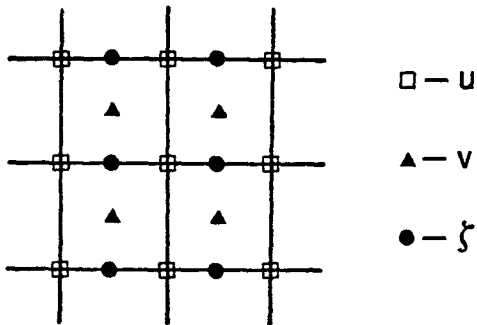


Abb. 4: Gitter C (nach MESINGER und ARAKAWA, 1976)

bereitet, da  $u$  und  $v$  nicht an den gleichen Gitterpunkten berechnet werden. Man muß  $v$  bzw.  $u$  im  $f$ -Term jeweils aus den vier benachbarten Punkten mitteln.

In der Arbeit von MESINGER und ARAKAWA werden für die Schwerewellen mit Trägheitseinfluß fünf verschiedene Gitter untersucht. Die für die  $y$ -unabhängigen Gleichungen günstigsten Gitter sind das oben dargestellte Gitter C und das in Abb. 5 dargestellte Gitter B.

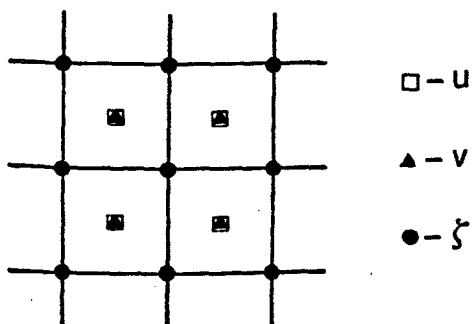


Abb. 5: Gitter B (nach MESINGER und ARAKAWA, 1976)

Für diese beiden Gitter sowie für die exakte Lösung sind in Abb. 6 das Dispersionsverhalten im zweidimensionalen Fall dargestellt.

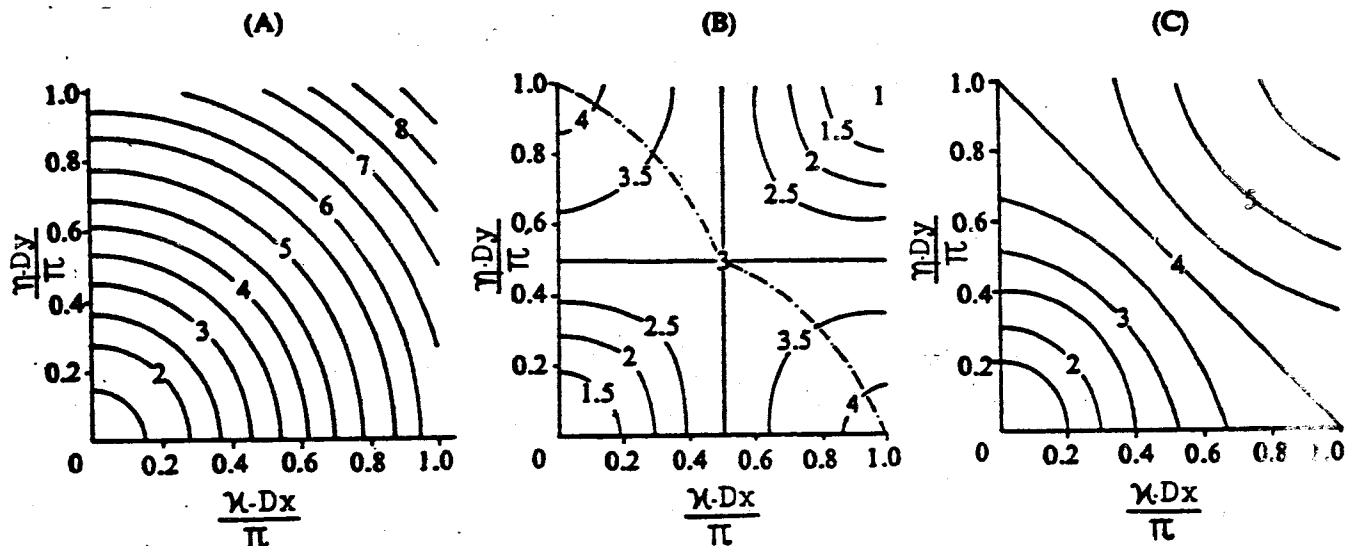


Abb. 6: Die dimensionslose Frequenz  $\frac{|v|}{f}$  in Abhängigkeit der Wellenzahl  $\frac{x \cdot Dx}{\pi}$  -  $\frac{y \cdot Dy}{\pi}$  für die exakte Lösung (A) und für die numerischen Lösungen in den Gittern (B) und (C) (nach MESINGER und ARAKAWA, 1976)

mit  $v$  - Frequenz  
 $f$  - Trägheitsfrequenz  
 $x$  - Wellenzahl in x-Richtung  
 $y$  - Wellenzahl in y-Richtung  
 $Dx, Dy$  - Gitterabstände in x-u. y-Richtung  
 $\lambda$  - Deformationsradius im barotropen Fall

Aufgetragen ist jeweils die dimensionslose Frequenz  $\frac{|v|}{f}$  in Abhängigkeit von den Wellenzahlen  $\frac{x \cdot Dx}{\pi}$  und  $\frac{y \cdot Dy}{\pi}$  für  $\frac{\lambda}{Dx} = 2$ .

Im Diagramm B sieht man, daß die Frequenz  $\frac{|v|}{f}$  für bestimmte  $x$ - $y$  Kombinationen ein Maximum besitzt, es ist durch - - - - dargestellt. Für diese  $x$ - $y$  Kombination ist also die Gruppengeschwindigkeit  $c_{gr} = \frac{\partial v}{\partial (x^2 + y^2)^{1/2}} = 0$ , für größere Wellenzahlen wird sie negativ, während die Gruppengeschwindigkeit für die exakte Lösung (Diagramm A) überall positiv ist. Im Diagramm C sieht man, daß ein Maximum nur in den beiden Eckpunkten  $\frac{x \cdot Dx}{\pi} = 1, \frac{y \cdot Dy}{\pi} = 0$  und  $\frac{x \cdot Dx}{\pi} = 0, \frac{y \cdot Dy}{\pi} = 1$  angenommen wird. Diese  $x$ - $y$  Kombinationen entsprechen der  $2 \cdot Dx$  bzw.  $2 \cdot Dy$  Welle, für sie gilt also Gruppengeschwindigkeit  $c_{gr} = 0$ , d.h. sie repräsentieren stationäre Wellen. Negative Gruppengeschwindigkeiten treten im C-Gitter nicht auf.

Da negative und verschwindende Gruppengeschwindigkeiten zu Fehlern in Energietransporten und evtl. zu Energieakkumulationen führen, wird im vorliegenden Modell das Gitter C benutzt. Doch auch das C-Gitter verursacht eine Verringerung der Phasengeschwindigkeit, die umso stärker wird, je größer  $\lambda \cdot Dx$ , bzw.  $\gamma \cdot Dy$ , d.h. je schlechter die Auflösung wird. Obige Diagramme sind für  $\frac{\lambda}{Dx} = 2$  berechnet, d.h. der Deformationsradius ist gleich der doppelten Gitterweite. Nach Angaben von MESINGER und ARAKAWA verändert das Diagramm des Gitters C seine positiven Merkmale für  $\frac{\lambda}{Dx} \leq 0(1)$ . Im ungeschichteten Medium ist  $\lambda = \frac{\sqrt{gH}}{f}$  und die Bedingung  $\frac{\lambda}{Dx} > 0(1)$  ist leicht erfüllt ( $\frac{\lambda}{Dx} = 0(100)$ ). Für das später betrachtete barokline Modell muß  $\frac{\lambda}{Dx}$  jedoch neu abgeschätzt werden, da der Deformationsradius von der Schichtung abhängt. Für die betrachteten Schichtungen zeigt sich jedoch später, Abschnitt 3.2.4., daß die Bedingung  $\frac{\lambda}{Dx} > 0(1)$  ebenfalls erfüllt ist.

Da - wie oben beschrieben - im benutzten C-Gitter der Coriolis-term nur durch Mittelung der vier benachbarten Geschwindigkeiten gewonnen werden kann, können sich verfälschte Trägheitsperioden ergeben (SIMONS, 1976). Im vorliegenden Modell sollen jedoch nicht in erster Linie Trägheitswellen berechnet werden, insofern wird dieser Nachteil als vertretbar betrachtet.

### 2.3.3. Der horizontale Austauschkoeffizient

Der horizontale Austauschkoeffizient soll neben der Simulation der turbulenten Flüsse in numerischen Modellen außerdem die durch das Gitter nicht mehr auflösbaren Prozesse (sub grid scale processes) ersetzen. Er wird deshalb üblicherweise von der Gitterweite abhängig gemacht. Wie in 2.3.1. beschrieben, laufen in einem gestreckten Modell kurze Wellen aus dem fein aufgelösten Bereich in ein Gebiet, in dem sie nicht mehr aufgelöst werden können. Diese Wellen sollten nach Möglichkeit weggedämpft werden, damit sie nicht als  $2 \cdot Dx$ -Wellen stationär im Gitter bleiben oder zu Gibb'schen Phänomenen führen. In vielen Modellen, z.B. in Modellen mit sprungweisen Gitterver-



größerungen werden Dämpfungszonen (sponge zones) eingebaut, die die schlecht aufgelösten Wellen dämpfen sollen (in SUNDSTRÖM und ELVIUS, 1979). Im vorliegenden Modell wird der Austauschkoeffizient im transformierten System konstant gesetzt. Das bedeutet, daß er im physikalischen System vom Zentrum der Transformation aus nach außen hin kontinuierlich größer wird und somit die Dämpfung kontinuierlich erhöht. Dieser Effekt wird unterstützt durch die gitterproduzierte Dämpfung, s. Abschnitt 2.3.1..

#### 2.3.4. Zeitliche Diskretisierung und Stabilitätsbetrachtung

Die zeitliche Diskretisierung des Gleichungssystem (21) - (23) erfolgt nach der Vorwärts-, Rückwärts-Methode, d.h. zuerst wird entweder die Kontinuitätsgleichung oder die Bewegungsgleichungen durch zeitliche Vorwärtsdifferenzen diskretisiert, dann die jeweils übrig gebliebenen Bewegungsgleichungen oder die Kontinuitätsgleichung durch Rückwärtsdifferenzen. Dieses System liefert im Gegensatz zu zeitlich nicht gestaffelten Methoden kein zeitliches Auseinanderlaufen der Lösungen an geraden bzw. ungeraden Zeitschritten. Für alle Gleichungen zeitliche Vorwärtsintegration zu benutzen, scheidet aus, da nach der Stabilitätsbedingung, die weiter unten beschrieben wird, folgen wurde  $Ah \gg 1,3 \cdot 10^8$  cgs. Nimmt man zentrale Differenzen im Raum, zeitliche Differenzen wie oben beschrieben und setzt  $Ah = \text{const.}$ , so folgt für das Gleichungssystem (21) - (23), wenn man es im Gitter (C), das in Abschnitt 2.3.2. beschrieben wurde, diskretisiert:

größerungen werden Dämpfungszonen (sponge zones) eingebaut, die die schlecht aufgelösten Wellen dämpfen sollen (in SUNDSTRÖM und ELVIUS, 1979). Im vorliegenden Modell wird der Austauschkoeffizient im transformierten System konstant gesetzt. Das bedeutet, daß er im physikalischen System vom Zentrum der Transformation aus nach außen hin kontinuierlich größer wird und somit die Dämpfung kontinuierlich erhöht. Dieser Effekt wird unterstützt durch die gitterproduzierte Dämpfung, s. Abschnitt 2.3.1..

#### 2.3.4. Zeitliche Diskretisierung und Stabilitätsbetrachtung

Die zeitliche Diskretisierung des Gleichungssystem (21) - (23) erfolgt nach der Vorwärts-, Rückwärts-Methode, d.h. zuerst wird entweder die Kontinuitätsgleichung oder die Bewegungsgleichungen durch zeitliche Vorwärtsdifferenzen diskretisiert, dann die jeweils übrig gebliebenen Bewegungsgleichungen oder die Kontinuitätsgleichung durch Rückwärtsdifferenzen. Dieses System liefert im Gegensatz zu zeitlich nicht gestaffelten Methoden kein zeitliches Auseinanderlaufen der Lösungen an geraden bzw. ungeraden Zeitschritten. Für alle Gleichungen zeitliche Vorwärtsintegration zu benutzen, scheidet aus, da nach der Stabilitätsbedingung, die weiter unten beschrieben wird, folgen würde  $Ah \gg 1,3 \cdot 10^8$  cgs. Nimmt man zentrale Differenzen im Raum, zeitliche Differenzen wie oben beschrieben und setzt  $Ah = \text{const.}$ , so folgt für das Gleichungssystem (21) - (23), wenn man es im Gitter (C), das in Abschnitt 2.3.2. beschrieben wurde, diskretisiert:

$$Y_{i-\frac{1}{2},j}^{m+1} = Y_{i-\frac{1}{2},j}^m - \frac{\Delta T}{\Delta s} \left( \frac{1}{B(x)} (u_{ij}^m - u_{i-1,j}^m) + \frac{1}{B(y)} (V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m) \right) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} u_{ij}^{m+1} = & u_{ij}^m - \frac{g \cdot H_{i,j} \cdot \Delta T}{B(x) \cdot \Delta s} (Y_{i+\frac{1}{2},j}^{m+1} - Y_{i-\frac{1}{2},j}^{m+1} + (P_{i+\frac{1}{2},j}^{m+1} - P_{i-\frac{1}{2},j}^{m+1}) / g \cdot \rho_o) + \\ & \frac{f \cdot \Delta T}{4} (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m + V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m + V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m + V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m) + \\ & \frac{A h \cdot \Delta T}{B(x)^2 \cdot \Delta s^2} (u_{i+1,j}^m - 2u_{ij}^m + u_{i-1,j}^m) - \frac{A h \cdot B_s(x) \cdot \Delta T}{B(x)^3 \cdot 2 \cdot \Delta s} (u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m) + \\ & \frac{A h \cdot \Delta T}{B(y)^2 \cdot \Delta s^2} (u_{i,j+1}^m - 2u_{ij}^m + u_{i,j-1}^m) - \frac{4 h \cdot B_s(y) \cdot \Delta T}{B(y)^3 \cdot 2 \cdot \Delta s} (u_{i,j+1}^m - u_{i,j-1}^m) + \\ & \frac{\tau \times O_{i,j}}{\rho_o} - \frac{\tau \times B_{i,j}}{\rho_o} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{m+1} = & V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m - \frac{g \cdot H_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \cdot \Delta T}{B(y) \cdot \Delta s} (Y_{i-\frac{1}{2},j}^{m+1} - Y_{i-\frac{1}{2},j-1}^{m+1} + (P_{i-\frac{1}{2},j}^{m+1} - P_{i-\frac{1}{2},j-1}^{m+1}) / g \cdot \rho_o) - \\ & \frac{f \cdot \Delta T}{4} (u_{i,j}^{m+1} + u_{i-1,j}^{m+1} + u_{i,j-1}^{m+1} + u_{i-1,j-1}^{m+1}) + \\ & \frac{A h \cdot \Delta T}{B(x)^2 \cdot \Delta s^2} (V_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^m - 2V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m + V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m) - \frac{A h \cdot B_s(x) \cdot \Delta T}{B(x)^3 \cdot 2 \cdot \Delta s} (V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m - V_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}}^m) + \\ & \frac{A h \cdot \Delta T}{B(y)^2 \cdot \Delta s^2} (V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m - 2V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m + V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^m) - \frac{A h \cdot B_s(y) \cdot \Delta T}{B(y)^3 \cdot 2 \cdot \Delta s} (V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m - V_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^m) + \\ & \frac{\tau \times O_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\rho_o} - \frac{\tau \times B_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\rho_o} \end{aligned} \quad (26)$$

Dabei wurden folgende Bezeichnungen benutzt:

$$Ds = Dx = Dy$$

$$Bs(x) = \frac{\Delta B(x)}{Ds}$$

$$Bs(y) = \frac{\Delta B(y)}{Ds}$$

$$Tx0 = \tau_0^{(x)} \quad Ty0 = \tau_0^{(y)}$$

$$TxB = \tau_B^{(x)} \quad TyB = \tau_B^{(y)} .$$

Um zu klären, ob und mit welchen Einschränkungen dieses System von Differenzengleichungen stabil ist, werden nach der Neumann'schen Methode die Verstärkungsmatrizen der einzelnen Gleichungen bestimmt (RICHTMYER und MORTON, 1967). Nach NEUMANN wird für alle Variablen ein Wellenansatz gemacht

$$\psi_{lm}^{n+1} = \hat{\psi}^{n+1} e^{i(\alpha \cdot l \cdot Dx + \gamma \cdot m \cdot Dy)}$$

und die Verstärkungsmatrix nach folgender Definition berechnet:

$$\hat{\psi}^{n+1}(\alpha, \gamma) = G(\alpha, \gamma, DT) \hat{\psi}^n(\alpha, \gamma) \quad (27)$$

- 1) Als erstes wird der Zeitschritt DT für zweidimensionale Schwerewellen berechnet. Mit dem oben beschriebenen Wellenansatz für  $\psi$ , U und V ergibt sich nach einigen trigonometrischen Umformungen die Vektorgleichung:

$$\begin{pmatrix} \hat{U}^{l+1} \\ \hat{V}^{l+1} \\ \hat{\psi}^{l+1} \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} \hat{U}^l \\ \hat{V}^l \\ \hat{\psi}^l \end{pmatrix}$$

mit der Verstärkungsmatrix  $G = \begin{pmatrix} 1-4 \cdot A \cdot C \cdot s(\alpha)^2 & -4 \cdot A \cdot C \cdot s(\alpha) \cdot s(\gamma) & -2 \cdot i \cdot A \cdot s(\alpha) \\ -4 \cdot A \cdot C \cdot s(\alpha) \cdot s(\gamma) & 1-4 \cdot A \cdot C \cdot s(\gamma)^2 & -2 \cdot i \cdot A \cdot s(\gamma) \\ -2 \cdot i \cdot C \cdot s(\alpha) & -2 \cdot i \cdot C \cdot s(\gamma) & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{mit } A = \frac{g \cdot H \cdot DT}{B \cdot Ds}$$

$$C = \frac{DT}{B \cdot Ds}$$

$$s(x) = \sin \frac{x \cdot Dx}{2}$$

$$s(y) = \sin \frac{y \cdot Dy}{2}$$

$$H = \max(H(x, y))$$

$$B = \min(B(x), B(y))$$

Die Matrix  $\Phi$  hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2/3} = 1 - \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L}{2} \left( \frac{L}{2} - 2 \right)} \quad \text{mit } L = 4 \cdot A \cdot C \cdot (s(x)^2 + s(y)^2)$$

Das System ist stabil, wenn  $\lambda \leq 1$  für alle  $x, y$ ;

das ist genau dann erfüllt, wenn  $\frac{L}{2} \leq 2$  und  $(1 - \frac{L}{2})^2 + |\frac{L}{2}(\frac{L}{2} - 2)| \leq 1$ ;

beide Bedingungen sind erfüllt für  $L \leq 4 \Leftrightarrow \frac{g \cdot H \cdot DT^2}{B^2 \cdot Ds^2} (\sin^2 \frac{x \cdot Dx}{2} + \sin^2 \frac{y \cdot Dy}{2}) \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot g \cdot H \cdot DT^2}{B^2 \cdot Ds^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{DT}{Ds} \leq \frac{B}{\sqrt{2 \cdot g \cdot H}} \quad (28)$$

2) Betrachtet man zusätzlich die Trägheitsterme, so hat die charakteristische Gleichung zusätzliche Terme.

Für die Eigenwerte folgen die Gleichungen:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2/3} = 1 - \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T}{2} \left( \frac{T}{2} - 2 \right)}$$

$$T = 4 \cdot A \cdot C \cdot (s^2(x) + s^2(y)) + DT^2 f^2 \cos^2 \frac{x \cdot Dx}{2} \cdot \cos^2 \frac{y \cdot Dy}{2} = 4 \cdot A \cdot C \cdot DT \cdot f \cdot s(x) s(y) \cdot \cos \frac{x \cdot Dx}{2} \cos \frac{y \cdot Dy}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Stabilitätsbedingung } T \leq 4 \Leftrightarrow DT \leq \frac{1}{\left( \frac{2 \cdot g \cdot H}{B^2 Ds^2} \left( 1 + \frac{DT \cdot f}{2} \right) + \frac{f^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (29)$$

Die Hinzunahme des Coriolisterms verschärft die Stabilitätsbedingung also nur wenig. Für die in diesem Modell geltenden Parameter folgt für reine Schwerewellen  $DT = 0(50-100)\text{sec}$ ; mit  $f = 0(10^{-4})$

wird das zulässige  $DT$  um weniger als 0,1% verkleinert.

Der Coriolisterm in Gleichung (26) muß aus Stabilitätsgründen implizit, d.h. zum aktuellen Zeitpunkt  $n+1$  genommen werden.

- 3) Die Austauschterme werden - wie weiter unten ausgeführt werden wird - von den Schwere-Trägheits-Termen getrennt behandelt. Deshalb ist es erlaubt, auch die Stabilitätsbetrachtungen einzeln auszuführen.

Setzt man die Definition (27) in die verbleibenden Austauschterme der Gleichungen (25) und (26) ein, so folgt für den Verstärkungsfaktor jeweils

$$g = \frac{(E+F)^2 + (C+D)^2}{(E+F)^2} ; \text{ mit der Stabilitätsbedingung } g \leq 1 \text{ folgt}$$

$$(E+F)^2 + (C+D)^2 \leq (E+F)^2 \text{ mit } E = \frac{2 \cdot DT \cdot Ah}{B(x)^2 \cdot Ds^2}$$

$$F = \frac{2 \cdot DT \cdot Ah}{B(y)^2 \cdot Ds^2}$$

$$C = \frac{Bs(x) \cdot DT \cdot A}{B(x)^3 \cdot Ds \cdot 2}$$

$$D = \frac{Bs(y) \cdot DT \cdot A}{B(y)^3 \cdot 2 \cdot Ds}$$

Im Falle ohne Koordinatentransformation verschwinden C und D und es folgt die Stabilitätsbedingung  $(E+F) \leq 1 \Leftrightarrow DT \leq \frac{Ds^2}{4 \cdot Ah}$ , (30) das bedeutet eine Vergrößerung des Zeitschrittes DT. Da in der benutzten Transformation  $\max(\frac{Bs(x)}{B(x)}, \frac{Bs(y)}{B(y)}) \approx 6 \cdot 10^{-7}$  beträgt, ist die Einschränkung für den Zeitschritt DT, die aus der Transformation resultiert, gering.

Abweichend von der obigen Bezeichnung wird beim Einsetzen der benutzten Parameter in die Stabilitätsbedingungen (28) und (29) nicht  $H=\max(H(x,y))$  und  $B=\min(B(x),B(y))$  genommen, sondern  $\max(\frac{H(x,y)}{B(x)^2}, \frac{H(x,y)}{B(y)^2})$ , da nur diese Quotienten in die Stabilitätsbedingungen eingehen. Gerade in den Bereichen mit kleinen B(x) und B(y) ist die Wassertiefe gering (Kieler Bucht), während in den Bereichen mit großer Wassertiefe die Transformationsparameter B(x) und B(y) größer werden. Die Stabilitätsbedingung (29) wurde für jeden Punkt berechnet, dabei ergab sich die Forderung  $DT \leq 50 \text{ sec}$ . Die Stabilitätsbedingung für die Austauschterme ergibt:  $Ah=10^6 \text{ cgs} \Rightarrow DT \leq 5600 \text{ sec}$   
 $Ah=10^7 \text{ cgs} \Rightarrow DT \leq 560 \text{ sec}$

Damit die Austauschterme den Zeitschritt  $DT$  nicht stärker einschränken als die Schwereterme, muß  $Ah \leq 10^8$  cgs gewählt werden. Bei den im vorliegenden Modell betrachteten Skalen und Gittern wird  $Ah \leq 10^7$  gewählt, SCHOTT et al. (1976) finden in einem Experiment in der Ostsee  $Ah = 0(10^6)$  cgs. Da die Schwere-Trägheitsterme einen wesentlich kleineren Zeitschritt in ihrer zeitlichen Diskretisierung benötigen als die Austauschterme für  $Ah \leq 10^7$ , wird die Marchuk'sche "time-splitting" Methode angewandt. Sie erlaubt, die verschiedenen Terme des Gleichungssystems (24) bis (26) einzeln und mit unterschiedlichen Zeitschritten zu integrieren (RICHTMYER und MORTON, 1967). In diesem Fall werden die Gleichungen mit den Schwere- und Trägheitstermen 5mal mit dem Zeitschritt  $DT=50$  sec durchlaufen, dann die Austauschterme einmal mit dem Zeitschritt  $DT=250$  sec.

In transformierten Gleichungen oder nicht äquidistanten Gittern werden oft mit größer werdendem Gitterabstand die Zeitschritte ebenfalls vergrößert. Neben dem ökonomischen Effekt wird hierbei der variierende Phasenfehler positiv beeinflusst (PHILLIPS und SHUKLA, 1973). Im vorliegenden Modell wird das nicht gemacht, da - wie oben beschrieben - mit abnehmender Auflösung die Tiefe zunimmt und deshalb eine Vergrößerung von  $DT$  nur in den weiter vom Zentrum entfernt liegenden Gebieten durchgeführt werden könnte. Dort liegen wiederum so wenige Gitterpunkte, daß die Komplizierung des Programmes den ökonomischen Vorteil in Frage stellt.

### 3. DAS BAROKLINE MODELL

Wie in der Einleitung beschrieben, ist das Strömungsfeld der Kieler Bucht sehr ungleichförmig, das gilt auch für die Vertikale. Viele Messungen zeigen Situationen mit unterschiedlichen Strömungsrichtungen an der Oberfläche und in der Tiefe (HARDTKE, 1978; JACOBSEN, 1980); die Bodenströmung in dem Rinnensystem scheint oft vom übrigen Strömungsfeld der Kieler Bucht entkoppelt zu sein (ZENK et al., 1979). Daraus folgt, daß man eine Variabilität des Strömungsfeldes mit der Tiefe zulassen sollte.

Hier wird ein Mehrschichtenmodell mit konstanter Schichtdicke und realer Topographie entwickelt. Da die Wassermasse in der Beltsee ein Mischwasser aus Nord- und Ostseewasser ist, existiert besonders im Sommer eine ausgeprägte Dichtesprungschicht. Deshalb wird baroklin gerechnet. Das Hin- und Herwandern der Beltseefront, die je nach Ein- oder Ausstromlage weiter zur Ostsee oder zum Skagerrak verläuft (SIEDLER und HATJE, 1974), wird jedoch nicht simuliert, da sich die hier berechneten Fälle auf eine Ausgangssituation mit horizontalen Dichteschichtungen beschränken.

#### 3.1. DAS GLEICHUNGSSYSTEM

Als Ausgangsgleichungssystem gelten die Gleichungen (7) - (10), zusätzlich eine Zustandsgleichung und die Erhaltungsgleichung für die Partialmasse  $\rho$ -s. Die Kontinuitätsgleichung ging im barotropen Fall in die Gleichung (10) über, da für  $\rho = \rho_0 = \text{const.}$  gilt  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . Im baroklinen Fall ist  $\frac{d\rho}{dt} \neq 0$ , jedoch sind die Terme  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ,  $u \frac{\partial \rho}{\partial x}$  und  $v \frac{\partial \rho}{\partial y}$  in der Gleichung  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  gegenüber den Termen  $\rho \frac{\partial u}{\partial x}$  und  $\rho \frac{\partial v}{\partial y}$  klein, so daß man sie vernachlässigen darf und nach wie vor Gleichung (10) gilt.



### 3.1.1. Die Zustandsgleichung

Als Zustandsgleichung wird die von MILLERO und KREMLING abgeleitete Gleichung für die Ostsee benutzt (MILLERO und KREMLING, 1976).  $\rho = \rho_0 + A(T)\tilde{S}_T + B(T)\tilde{S}_T^2$  (32)

$$\text{mit } \rho_0 = (0,9998676 + 18,2254 \cdot 10^{-3}T - 7,9224 \cdot 10^{-6}T^2 - 55,4500 \cdot 10^{-9}T^3 + 149,7904 \cdot 10^{-12}T^4 - 393,306 \cdot 10^{-15}T^5) / (1 + 18,1597 \cdot 10^{-5}T)$$

$$A(T) = 8,1483 \cdot 10^{-4} - 3,924 \cdot 10^{-6}T + 9,195 \cdot 10^{-8}T^2 - 1,475 \cdot 10^{-9}T^3$$

$$B(T) = -1,246 \cdot 10^{-6} + 2,73 \cdot 10^{-8}T$$

$$\tilde{S}_T = 0,123 + 0,99650 S$$

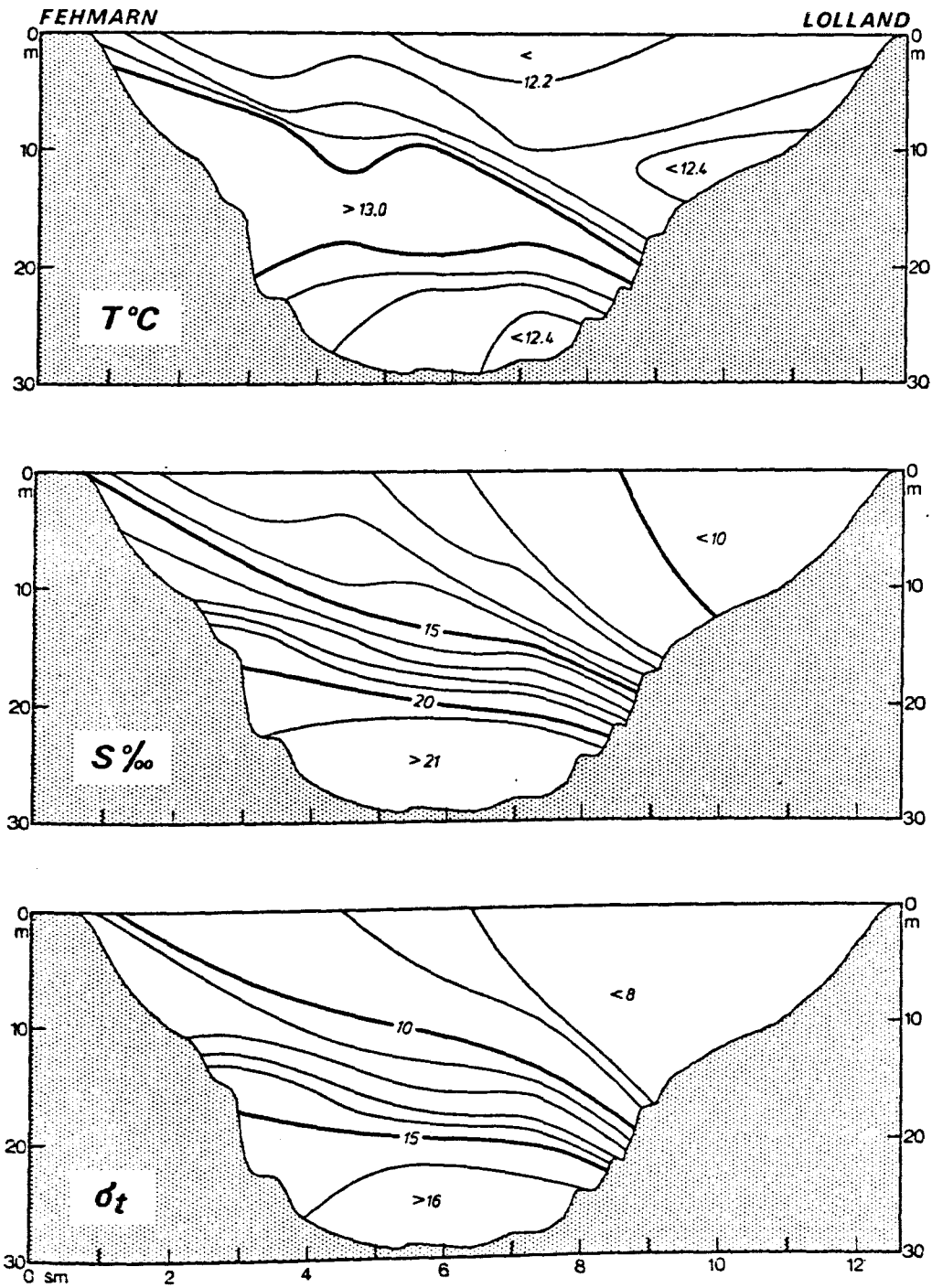
S-Salzgehalt (‰)

T-Temperatur (°C)

Im vorliegenden Modell wird die Temperatur T in jeder Schicht konstant gesetzt und nur der Salzgehalt als Variable genommen:

$$\rho_i(x,y,t) = \rho_i(s_i(x,y,t), T_i).$$

Das ist gerechtfertigt, da die Dichteschichtung - wie Abb. 7 zeigt - hauptsächlich von der Salzgehaltsschichtung bestimmt ist. In Abb. 7 ist die Dichte-, Salzgehalts- und Temperaturschichtung im Fehmarnbelt im Herbst 1970 dargestellt (SIEDLER und HATJE, 1974), Messungen zu anderen Jahreszeiten, Juli 1976 im Fehmarnbelt, März 1978 im Großen Belt (HARDTKE, 1978), zeigen die gleiche enge Verknüpfung zwischen Dichte- und Salzgehaltsschichtung, so daß sichergestellt ist, daß dieser Zusammenhang nicht nur zufällig für die hydrographische Situation im Herbst 1970 besteht. Wählt man lediglich  $S_i(x,y,t)$  und  $T_i = \text{const}(i)$ , so braucht nur die Erhaltungsgleichung für Salz berechnet zu werden, die Wärmeleitungsgleichung entfällt.



**Abb. 7:** Temperatur-, Salzgehalts- und Dichtequerschnitt im Fehmarn-Belt im Herbst 1970 (nach unveröffentlichten Daten von KRAUSE).

(aus SIEDLER und HATJE, 1974)

### 3.1.2. Die Erhaltungsgleichung für die Partialmasse $\varrho \cdot s$

Die Salzgleichung lautet:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\varrho_0} \nabla \cdot (A_s \cdot \nabla s) \quad s = \text{Salzgehalt}$$

$\nabla = \text{dreidimensionaler Laplace-Operator}$   
 $A_s = \text{Austauschkoeffizient für Salz}$

bzw. in Impulsstromform:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{M} \cdot s = \nabla \cdot (A_s \cdot \nabla s) \quad (33)$$

### 3.1.3. Das Gleichungssystem für die einzelnen Schichten des Modells

Für jede Schicht gelten die Gleichungen (7) - (10), (32) und (33). Da  $\varrho$  nicht konstant ist, folgt aus der 3. Bewegungsgleichung (9) nicht mehr der einfache Ausdruck (11) wie im barotropen Fall, sondern:

$$(9) \Rightarrow \int_z^{\zeta} \frac{\partial \rho}{\partial z} dz = - \int_z^{\zeta} \varrho \varrho_0 dz - \int_z^{\zeta} \varrho (\varrho - \varrho_0) dz$$

$$\Rightarrow p(z) = p_1 + \varrho_0 \varrho (\zeta - z) + \int_z^{\zeta} \sigma dz \quad \text{mit } p_1 = p_1 \text{ Luftdruck} \quad (34)$$

$\sigma = (\varrho - \varrho_0) \varrho$

Die Gleichungen (7), (8), (10) und (33) werden analog dem barotropen Fall jeweils über die Schichtdicke vertikal integriert. Dabei gelten die Bezeichnungen:

$$U_{k-\frac{1}{2}} = \int_{z_k}^{z_{k-1}} u dz \quad \text{mit } z_k \text{-Tiefe der Schicht } k$$

$$V_{k-\frac{1}{2}} = \int_{z_k}^{z_{k-1}} v dz$$

$$S_{k-\frac{1}{2}} = \int_{z_k}^{z_{k-1}} s dz$$

und die Beziehung  $D_{k-\frac{1}{2}} = z_{k-1} - z_k$ .

Die Anzahl der Schichten beträgt K.

Die Bezeichnungen der Variablen pro Schicht bzw. Grenzfläche zwischen den Schichten sind in Abb. 8 dargestellt.

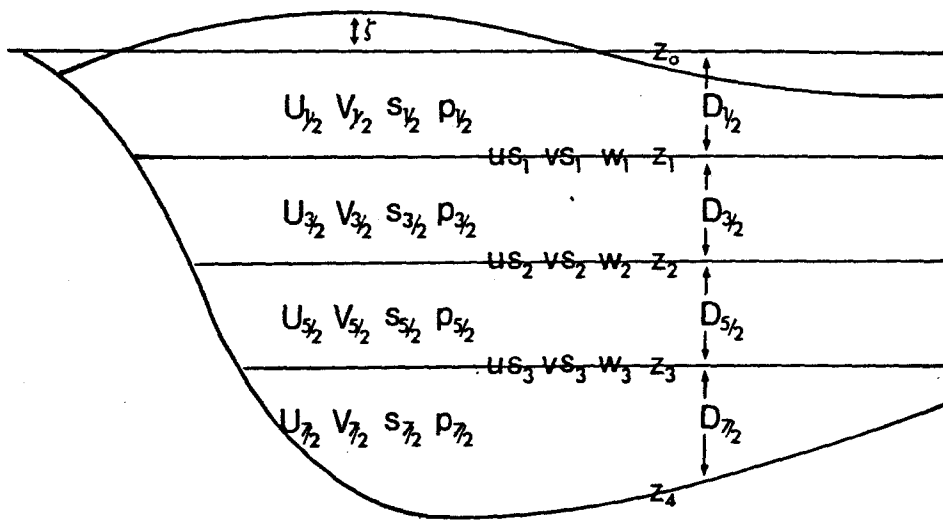


Abb. 8: Schichtenzerlegung und Bezeichnung der Variablen

Das Gleichungssystem für eine Schicht lautet:

$$\frac{\partial u_{k-1}}{\partial t} = f V_{k-1} - g \cdot D_{k-1} \frac{\partial}{\partial x'} \left( \gamma + \frac{p_L}{g \rho_0} \right) - \int_{z_k}^{z_{k-1}} \frac{\partial}{\partial x'} \left( \int_z^{\gamma} \sigma dz \right) dz + \frac{A_h}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial y'^2} \right) +$$

$$\frac{A_{V_{k-1}}}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z_{k-1}} - \frac{A_{V_k}}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z_k} - \frac{A_h}{\rho_0} \left[ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial z}{\partial y'} \right]_{z_{k-1}} + \frac{A_h}{\rho_0} \left[ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial z}{\partial y'} \right]_{z_k} \quad (35)$$

$$\frac{\partial V_{k-1}}{\partial t} = -f u_{k-1} - g \cdot D_{k-1} \frac{\partial}{\partial y'} \left( \gamma + \frac{p_L}{g \rho_0} \right) - \int_{z_k}^{z_{k-1}} \frac{\partial}{\partial y'} \left( \int_z^{\gamma} \sigma dz \right) dz + \frac{A_h}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 V_{k-1}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V_{k-1}}{\partial y'^2} \right) +$$

$$\frac{A_{V_{k-1}}}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z_{k-1}} - \frac{A_{V_k}}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z_k} - \frac{A_h}{\rho_0} \left[ \frac{\partial v}{\partial x'} \frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \frac{\partial z}{\partial y'} \right]_{z_{k-1}} + \frac{A_h}{\rho_0} \left[ \frac{\partial v}{\partial x'} \frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \frac{\partial z}{\partial y'} \right]_{z_k} \quad (36)$$

$$\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x'} + \frac{\partial V_{k-1}}{\partial y'} + w \Big|_{z_{k-1}} - w \Big|_{z_k} - u \frac{\partial z}{\partial x'} \Big|_{z_{k-1}} - u \frac{\partial z}{\partial x'} \Big|_{z_k} - v \frac{\partial z}{\partial y'} \Big|_{z_{k-1}} - v \frac{\partial z}{\partial y'} \Big|_{z_k} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (D_{k-1} S_{k-1}) + \frac{\partial}{\partial x'} (u_{k-1} S_{k-1}) + \frac{\partial}{\partial y'} (V_{k-1} S_{k-1}) - \frac{A_h s}{\rho_0} D_{k-1} \left( \frac{\partial^2 S_{k-1}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 S_{k-1}}{\partial y'^2} \right) =$$

$$\left[ (w - u \frac{\partial z}{\partial x'} - v \frac{\partial z}{\partial y'} - \frac{\partial z}{\partial t}) \cdot S \right]_{z_{k-1}} - \left[ (w - u \frac{\partial z}{\partial x'} - v \frac{\partial z}{\partial y'} - \frac{\partial z}{\partial t}) \cdot S \right]_{z_k} - \frac{A_h s}{\rho_0} \left[ \frac{\partial S}{\partial x'} \frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial S}{\partial y'} \frac{\partial z}{\partial y'} \right]_{z_{k-1}} +$$

$$\frac{A_h s}{\rho_0} \left[ \frac{\partial S}{\partial x'} \frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial S}{\partial y'} \frac{\partial z}{\partial y'} \right]_{z_k} + \frac{A_{Vs}}{\rho_0} \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{z_{k-1}} - \frac{A_{Vs}}{\rho_0} \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{z_k} \quad (38)$$

mit  $A_{hs} = \text{const.} = \text{horizontaler Austauschkoeffizient für Salz}$   
 $A_{Vs} = \text{const.} = \text{vertikaler Austauschkoeffizient für Salz}$

Der Zusammenhang zwischen  $\varrho$  und  $s$  ist in der Zustandsgleichung (32) gegeben.

Als zusätzliche Randbedingungen kommen die Bedingungen an den Grenzflächen zwischen den einzelnen Schichten und die Randbedingungen für die Salzgleichung (38) hinzu. An den Grenzflächen

gilt  $z=\text{const.}$ , so daß alle Terme mit Ableitungen von  $z$  wegfallen. In Gleichung (35) und (36) bleiben von den Randtermen lediglich die vertikalen Austauschsterme übrig. In Gleichung (37) wird die Vertikalgeschwindigkeit an den Grenzflächen benötigt. Diese Terme werden für jede Schicht berechnet und eingesetzt.

Als Randbedingung für die Salzgleichung gelte, daß kein Salzfluß durch die Oberfläche und den Boden existiere:

$$A v_s \left. \frac{\partial s}{\partial z} \right|_{z=-H} - A h_s \left. \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{z=-H} - A h_s \left. \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{z=-H} = 0 \quad (39)$$

$$A v_s \left. \frac{\partial s}{\partial z} \right|_{z=\zeta} - A h_s \left. \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{z=\zeta} - A h_s \left. \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{z=\zeta} = 0. \quad (40)$$

### 3.2. DIE NUMERISCHE BEHANDLUNG DES BAROKLINEN GLEICHUNGSSYSTEMS

Das Mehrschichtenmodell wird nach einem Verfahren von SIMONS aufgebaut (SIMONS, 1973). Die Summe der Gleichungen in den einzelnen Schichten ist konsistent mit der über die ganze Tiefe integrierten Gleichung,  $U = U_{1/2} + U_{3/2} + U_{5/2} + U_{7/2}$ . Für jeden Zeitschritt wird zuerst die externe Lösung, die die Oberflächenwellen enthält, mit dem über die gesamte Tiefe integrierten Modell berechnet, dann werden die Gleichungen für die Scherungen zwischen den Schichten gelöst. Aus den Scherungen wiederum schließt man iterativ auf die Geschwindigkeiten und Massentransporte in den einzelnen Schichten. Wie man in der später folgenden Ableitung der Scherungsgleichungen sieht, fällt der barotrope Druckanteil heraus und es bleibt nur der barokline Druckunterschied zwischen zwei Schichten bestehen.

Der barotrope Druckanteil enthält die Oberflächenauslenkung. Gerade die numerische Behandlung des Schwereterms fordert jedoch die stärkste Einschränkung des Zeitschrittes in der zeitlich-räumlichen Diskretisierung (siehe Stabilitätsbetrachtung in 2.3.4.). Fällt der barotrope Druckterm heraus, so kann

man also mit einem wesentlich größeren Zeitschritt  $\Delta t$  rechnen,  $\Delta t$  wird jetzt beschränkt durch die Phasengeschwindigkeit der schnellsten Welle.

$$\text{Sei } u_{s_k} = u_{k-1/2} - u_{k+1/2}, \text{ wobei } u_{k-1/2} = \frac{u_{k-1/2}}{D_{k-1/2}} \text{ ist,} \quad (41)$$

$$v_{s_k} = v_{k-1/2} - v_{k+1/2}; \quad (42)$$

dann folgt aus Gleichung (35) und (41) mit den entsprechenden Randbedingungen des Abschnittes 3.1.3. für  $u_{s_k}$ ,  $k=1, \dots, K-1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{s_k}}{\partial t} &= f \cdot v_{s_k} - \frac{1}{D_{k-1/2}} \int_{z_k}^{z_{k-1/2}} \frac{\partial}{\partial x'} \left( \int_{z_{k-1/2}}^z \sigma dz \right) dz + \frac{1}{D_{k+1/2}} \int_{z_{k+1/2}}^{z_k} \frac{\partial}{\partial x'} \left( \int_z^{z_{k+1/2}} \sigma dz \right) dz + \\ &\frac{Ah}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 u_{s_k}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_{s_k}}{\partial y'^2} \right) + \frac{T_{x_{k-1}}}{D_{k-1/2}} - \frac{T_{x_k}}{D_{k-1/2}} - \frac{T_{x_k}}{D_{k+1/2}} - \frac{T_{x_{k+1}}}{D_{k+1/2}} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\text{mit: } T_{x_k} = \begin{cases} \frac{\tau_{\sigma}^{(x)}}{\rho_0} & \text{für } k=0 \\ \frac{A v_k}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z_k} & \text{für } k \neq 0, k \neq K \\ \frac{\tau_{\beta}^{(x)}}{\rho_0} & \text{für } k=K \end{cases} \quad (44)$$

Die Gleichung für  $v_s$  lautet analog zu der Gleichung für  $u_s$  mit:

$$T_{y_k} = \begin{cases} \frac{\tau_{\sigma}^{(y)}}{\rho_0} & \text{für } k=0 \\ \frac{A v_k}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z_k} & \text{für } k \neq 0, k \neq K \\ \frac{\tau_{\beta}^{(y)}}{\rho_0} & \text{für } k=K \end{cases} \quad (45)$$

Der barokline Druckanteil, das sind der zweite und dritte Term der rechten Seite, lassen sich zusammenfassen zu:

$$A_k = - \frac{1}{D_{k-\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x'} \rho' dz + \frac{1}{D_{k+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial x'} \rho' dz$$

mit  $\rho'(z) = \int_z^{\infty} \sigma dz$

Wenn die Dichte über eine Schicht als konstant angenommen wird, folgt:

$$A_k = - \frac{\partial}{\partial x'} (\rho'_{k+\frac{1}{2}} - \rho'_{k-\frac{1}{2}}) = - \frac{\partial}{\partial x'} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \sigma dz = - (z_{k+\frac{1}{2}} - z_{k-\frac{1}{2}}) \frac{\partial}{\partial x'} (\rho_k - \rho_0) g \quad (46)$$

$\rho_k = \rho_k(s_k)$  ist in Gleichung (32) bestimmt.

$$\Rightarrow A_k = \frac{g(D_{k+\frac{1}{2}} + D_{k-\frac{1}{2}})}{2} \left( A(T_k) \cdot 0.9965 \cdot \frac{\partial s_k}{\partial x'} + B(T_k) \frac{\partial}{\partial x'} (0.9965 \cdot s_k)^{\frac{3}{2}} \right)$$

Dabei werden  $\rho_k$  und  $s_k$  als Mittelwerte der Dichten bzw. der Salzgehalte der benachbarten Schichten genommen:

$$\rho_k = (\rho_{k+\frac{1}{2}} + \rho_{k-\frac{1}{2}}) / 2$$

$$s_k = (s_{k+\frac{1}{2}} + s_{k-\frac{1}{2}}) / 2$$

In der Gleichung für  $v_s$  lautet der Druckterm analog zur  $u_s$ -Gleichung

$$B_k = - (z_{k+\frac{1}{2}} - z_{k-\frac{1}{2}}) \frac{\partial}{\partial y'} (\rho_k - \rho_0) \cdot g$$

$$\text{mit (32)} \Rightarrow B_k = \frac{g(D_{k+\frac{1}{2}} + D_{k-\frac{1}{2}})}{2} \left( A(T_k) \cdot 0.9965 \cdot \frac{\partial s_k}{\partial y'} + B(T_k) \frac{\partial}{\partial y'} (0.9965 \cdot s_k)^{\frac{3}{2}} \right) \quad (47)$$

Der barokline Druckanteil über alle Schichten integriert, berechnet sich folgendermaßen:

$$ACL = \sum_{k=1}^4 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\partial}{\partial x'} \rho' dz = \sum_{k=1}^4 D_{k-\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \Big|_{k-\frac{1}{2}}$$



Wie aus den Ableitungen der Gleichungen (46) und (47) hervorgeht, lassen sich Differenzen der Druckterme zweier Schichten leichter handhaben, als die baroklinen Druckanteile selbst.

Deshalb wird der obige Ausdruck umgeformt zu:

$$ACL = H \frac{\partial p'}{\partial x'} \Big|_{\frac{z}{2}} + \left( \sum_{k=2}^4 D_{k-\frac{1}{2}} \right) \left( \frac{\partial p'}{\partial x'} \Big|_{\frac{z}{2}} - \frac{\partial p'}{\partial x'} \Big|_{\frac{z}{2}} \right) + \left( \sum_{k=3}^4 D_{k-\frac{1}{2}} \right) \left( \frac{\partial p'}{\partial x'} \Big|_{\frac{z}{2}} - \frac{\partial p'}{\partial x'} \Big|_{\frac{z}{2}} \right) + D_{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial p'}{\partial x'} \Big|_{\frac{z}{2}} - \frac{\partial p'}{\partial x'} \Big|_{\frac{z}{2}} \right)$$

Die zweiten, dritten und vierten Terme der rechten Seite sind in Gleichung (46) bestimmt, der erste Term lautet:

$$H \frac{\partial p'}{\partial x'} \Big|_{\frac{z}{2}} = H \frac{\partial}{\partial x'} \int_{\frac{z}{2}}^{\zeta} g (g - g_0) dz = H (\zeta - z_{\frac{1}{2}}) \frac{\partial}{\partial x'} (g (\zeta - g_0)) + H \frac{\partial \zeta}{\partial x'} g (\zeta - g_0) = g H (\zeta - z_{\frac{1}{2}}) \frac{\partial}{\partial x'} (\zeta - g_0)$$

Vernachlässigt man  $\zeta \ll z_{1/2}$  und setzt  $z_{1/2} = \frac{z_1}{2}$ , so folgt:

$$ACL = \int_{K=1}^K \int_{z_K}^{z_{K-1}} \frac{\partial}{\partial x'} p' dz = \frac{-z_1 \cdot H \cdot g}{2} \frac{\partial}{\partial x'} (g_{\frac{1}{2}} - g_0) + \sum_{j=2}^K \left[ \left( \sum_{k=j}^K D_{k-\frac{1}{2}} \right) \cdot A_{j-1} \right] \quad (48)$$

$$BCL = \int_{K=1}^K \int_{z_K}^{z_{K-1}} \frac{\partial}{\partial y'} p' dz = \frac{-z_1 \cdot H \cdot g}{2} \frac{\partial}{\partial y'} (g_{\frac{1}{2}} - g_0) + \sum_{j=2}^K \left[ \left( \sum_{k=j}^K D_{k-\frac{1}{2}} \right) \cdot B_{j-1} \right] \quad (49)$$

### 3.2.1. Das Gleichungssystem in der Form, in der es numerisch integriert wird

1) Die Gleichungen für den über die gesamte Tiefe integrierten Fall:

$$u = \sum_{k=1}^4 u_{k-\frac{1}{2}} \quad (50)$$

$$V = \sum_{k=1}^4 V_{k-\frac{1}{2}} \quad (51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g(H+Y) \frac{\partial}{\partial x'} \left( Y + \frac{P_z}{g \rho_o} \right) - A C L + f \cdot V + \frac{A h}{\rho_o} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} \right) + \frac{\tau_o^{(x)}}{\rho_o} - \frac{\tau_B^{(x)}}{\rho_o} \quad (52)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g(H+Y) \frac{\partial}{\partial y'} \left( Y + \frac{P_z}{g \rho_o} \right) - B C L - f \cdot u + \frac{A h}{\rho_o} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \right) + \frac{\tau_o^{(y)}}{\rho_o} - \frac{\tau_B^{(y)}}{\rho_o} \quad (53)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y'} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 \quad (54)$$

2) Die Gleichungen für die interne Bewegung:

$$\frac{\partial (us)_k}{\partial t} = A_k + f \cdot vs_k + \frac{A h}{\rho_o} \left( \frac{\partial^2 us_k}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 vs_k}{\partial y'^2} \right) + \frac{\tau_{x_{k-1}}}{D_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{\tau_{x_k}}{D_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{\tau_{x_k}}{D_{k+\frac{1}{2}}} + \frac{\tau_{x_{k+1}}}{D_{k+\frac{1}{2}}} \quad (55)$$

$$\frac{\partial (vs)_k}{\partial t} = B_k - f \cdot us_k + \frac{A h}{\rho_o} \left( \frac{\partial^2 vs_k}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 us_k}{\partial y'^2} \right) + \frac{\tau_{y_{k-1}}}{D_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{\tau_{y_k}}{D_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{\tau_{y_k}}{D_{k+\frac{1}{2}}} + \frac{\tau_{y_{k+1}}}{D_{k+\frac{1}{2}}} \quad (56)$$

Aus den Scherungen  $us_k$  und  $vs_k$  werden die mittleren Geschwindigkeiten pro Schicht iterativ bestimmt:

$$u_{k+\frac{1}{2}} = u_{k-\frac{1}{2}} - (u_{k-\frac{1}{2}} - u_{k+\frac{1}{2}}) = u_{k-\frac{1}{2}} - us_k \quad , \quad k=1,2,3 \quad (57)$$

$u_{1/2}$ , der Anfangswert der Iteration wird berechnet aus der Geschwindigkeit des über die gesamte Tiefe integrierten Modells und sämtlichen Scherungen zwischen den Schichten.

$$u_{\frac{1}{2}} = u - \sum_{k=2}^4 u_{k-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{\frac{1}{2}} \cdot H &= u - \sum_{k=2}^4 D_{k-\frac{1}{2}} u_{k-\frac{1}{2}} + \sum_{k=2}^4 D_{k-\frac{1}{2}} \cdot u_{\frac{1}{2}} \\ &= u + (u_{\frac{1}{2}} - u_{\frac{3}{2}}) \sum_{k=2}^4 D_{k-\frac{1}{2}} + (u_{\frac{3}{2}} - u_{\frac{5}{2}}) \sum_{k=3}^4 D_{k-\frac{1}{2}} + (u_{\frac{5}{2}} - u_{\frac{7}{2}}) \sum_{k=4}^4 D_{k-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = \frac{u}{H} + u s_1 \frac{H - D_{12}}{H} + u s_2 \frac{H - D_{12} - D_{32}}{H} + u s_3 \frac{D_{72}}{H} \quad (58)$$

$$\text{analog gelten } v_{k+1/2} = v_{k-1/2} - v s_k \quad \text{mit } k=1, 2, 3 \quad (59)$$

$$\text{und } v_{1/2} = \frac{v}{H} + v s_1 \frac{H - D_{12}}{H} + v s_2 \frac{H - D_{12} - D_{32}}{H} + v s_3 \frac{D_{72}}{H} \quad (60)$$

Die Vertikalgeschwindigkeit  $w_k$  wird für die Schichtgrenzen  $k=1, \dots, K-1$  aus der Kontinuitätsgleichung bestimmt:

$$w_{k-1} = - \frac{\partial u_{k-1/2}}{\partial x'} - \frac{\partial v_{k-1/2}}{\partial y'} \quad \text{für } k=K \quad (61)$$

$$w_{k-1} = - w_k - \frac{\partial u_{k-1/2}}{\partial x'} - \frac{\partial v_{k-1/2}}{\partial y'} \quad \text{für } k=2, \dots, K-1 \quad (62)$$

Der Salzgehalt  $s_{k-1/2}$  wird für alle Schichten  $k=1, \dots, K$  aus Gleichung (38) bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (D_{k-\frac{1}{2}} \cdot s_{k-\frac{1}{2}}) &= - \frac{\partial}{\partial x'} (u_{k-\frac{1}{2}} \cdot s_{k-\frac{1}{2}}) - \frac{\partial}{\partial y'} (v_{k-\frac{1}{2}} \cdot s_{k-\frac{1}{2}}) - w_{k-1} + w_k + \\ &\quad \frac{A_{hs} \cdot D_{k-\frac{1}{2}}}{s_0} \left( \frac{\partial^2 s_{k-\frac{1}{2}}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 s_{k-\frac{1}{2}}}{\partial y'^2} \right) + A_{vert. \cdot k-1} - A_{vert. \cdot k} \end{aligned} \quad (63)$$

$$\text{mit } A_{vert. \cdot k} = \begin{cases} \frac{A_{vs} \frac{\partial s}{\partial z}}{s_0 \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}} & \text{für } k=1, \dots, K-1 \\ 0 & \text{für } k=0, K \end{cases} \quad (64)$$

$$w_k = \begin{cases} w \cdot s'_{\frac{1}{2}k} & \text{für } k=1, \dots, K-1 \\ 0 & \text{für } k=0, K. \end{cases} \quad (65)$$

Bestimmt man die Vertikalgeschwindigkeit  $w$  aus der Kontinuitätsgleichung, so ergeben sich in numerischen Modellen mit finiten Differenzen oft Schwierigkeiten bezüglich der Genauigkeit von  $w$ . Aus den Gleichungen (61) und (62) sieht man, daß die Größe  $w$  bestimmt wird aus der Differenz zweier sehr viel größerer Terme, die sich bis auf einige Prozent balancieren; das führt zu einer ungenauen Bestimmung von  $w$ .  $U_i$  und  $V_i$  sind jeweils Volumentransporte, d.h., je größer die Schichtdicken, über die integriert wird, desto ungenauer wird die Bestimmung von  $w$ . Erfahrungsgemäß nehmen numerische Probleme, wie etwa die Erzeugung von instabiler Schichtung durch nicht-physikalische Mechanismen, mit wachsender Schichtanzahl ab, ein Grund könnte die ungenaue Bestimmung von  $w$  sein.

Im vorliegenden Modell werden Gleichung (61) und (62) in der angegebenen Reihenfolge gelöst. Aus den Volumentransporten der unteren Schicht wird mit Hilfe der Randbedingung für  $w$  am Boden die Vertikalgeschwindigkeit an der oberen Begrenzung der unteren Schicht bestimmt. Aus dieser und den Volumentransporten der nächst höheren Schicht wird wiederum die Vertikalgeschwindigkeit an der Obergrenze der nächst höheren Schicht berechnet. Das heißt, daß ein Fehler in  $w$  jeweils an die nächst höhere Schicht weitergegeben wird. Dieses Verfahren wird bis  $w_1$ , der Obergrenze der zweiten Schicht fortgesetzt.  $w'_{k=0}$  ist die in Randbedingung (15) angegebene Funktion der Auslenkung der Meeresoberfläche  $\zeta$ .  $\zeta$  wird nach Gleichung (54) aus der Kontinuitätsgleichung für den über die gesamte Meerestiefe integrierten Fall bestimmt. Da nach Gleichung (50) und (51) die Summe der Gleichungen der einzelnen Schichten konsistent ist mit den über die ganze Tiefe integrierten Gleichungen, sollte die Kontinuitätsgleichung in der oberen Schicht mit  $w_1$  aus Gleichung (62) und  $w_0$ , bzw.  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  aus Gleichung (54) identisch erfüllt sein. Nachrechnen hat jedoch ergeben, daß die Kontinuitätsgleichung in der oberen Schicht nicht für alle Gitterpunkte identisch erfüllt ist. Es ergibt sich eine Abweichung von bis zu  $O(10^{-3})$ , also nur eine Größenordnung kleiner als  $w$

selbst. Der Fehler in der Bestimmung der einzelnen  $w_k$  akkumuliert sich in der oberen Schicht. Berechnet man die Salzgleichung (63) in der oberen Schicht mit den fehlerhaften Werten für  $w$ , so daß die Kontinuitätsgleichung in dieser Schicht nicht erfüllt ist, so kann auch die Salzbalance nicht erfüllt sein. Deshalb wird für die obere Schicht die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung gefordert und mit bekanntem  $U, V$  und  $\frac{\partial s}{\partial t}$  wird  $w_1$  bestimmt. Mit dem auf diese Weise bestimmten  $w_1$  ist die Summe der Gleichungen für  $w_k$  wieder konsistent mit dem aus der externen mode bestimmten  $w$ . Die Vertikalgeschwindigkeit wird lediglich in der Salzgleichung (63) benutzt; differieren  $w_{k-1}$  für  $k=2$  und  $w_k$  für  $k=1$ , so ist die Gesamtbilanz an Salz in dieser Wassersäule nicht erfüllt. In allen modellierten Fällen blieb jedoch die über alle horizontalen Gitterpunkte integrierte Partialmasse Salz erhalten.

Das Gleichungssystem (52) - (54) und (55) - (63), (32), (50) und (51) wird wie im barotropen Fall nach den Gleichungen (2), (3), (5) und (6) transformiert und in der angegebenen Reihenfolge mit den gleichen numerischen Methoden wie im barotropen Fall gelöst. In der neu hinzugekommenen Salzgleichung (63) werden die advektiven Terme mit Hilfe von upstream-Differenzen, d.h. Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenzen je nach Geschwindigkeitsrichtung approximiert. Upstream-Differenzen enthalten zwar eine starke Dämpfung, produzieren jedoch keine negativen Konzentrationen, Massenerhaltung ist gegeben (STRUVE, 1978). Als Randbedingungen an den horizontalen Rändern wird  $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y} = 0$ , also kein Salzfluß durch den Rand, angesetzt.

Das System (52) - (54) wird mit einem Zeitschritt  $DT=50$  sec bzw.  $DT=250$  sec dreimal (siehe Abschnitt 3.2.2.) integriert, daraufhin das System für die interne Bewegung (55) - (63), (32) und Gleichungen (50) und (51) einmal mit einem Zeitschritt  $DT=750$  sec (siehe Abschnitt 3.2.2.). Mit den Ergebnissen wird wiederum in das System (52) - (54) eingegangen.

### 3.2.2. Abschätzung des Zeitschrittes für die Berechnung der internen Bewegung

Der Zeitschritt  $\Delta T$  wird begrenzt durch die Fortschreitungs-  
geschwindigkeit der schnellsten internen Welle, das ist die  
längste Welle der 1. Ordnung. Zur Abschätzung der Größenord-  
nung der Phasengeschwindigkeit wird der Einfachheit halber  
exponentielle Dichteschichtung angenommen. Dann ist für ebene  
lange Wellen die Phasengeschwindigkeit  $c_n = \frac{\sqrt{g \Gamma_0} H}{n \cdot \pi}$  mit  
 $\rho = \rho_0 e^{\Gamma_0 z}$  und  $\Gamma_0 = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial z}$ .

Die hier benutzte Anfangsdichteverteilung ist nicht exponen-  
tiell, nimmt man jedoch abschnittsweise exponentiell steigende  
Dichte mit der Tiefe an und berechnet das maximale  $\Gamma_0$ , so er-  
gibt sich  $\Gamma_{0 \max} = 1.6172 \cdot 10^{-5}$ .

Die Stabilitätsbedingung  $\frac{\Delta T}{B(x) Ds} \leq \frac{1}{c_{\max}}$  ergibt dann

$$\begin{aligned} \text{mit } H &= 30 \text{ m} \\ B(x)_{\min} &= 1.5 \\ Ds &= 10^5 \text{ cm} \\ n &= 1 \end{aligned} \Rightarrow c_1 = 120 \text{ cm sec}^{-1} \Rightarrow \Delta T \leq 1247 \text{ sec.}$$

### 3.2.3. Stabilitätsbetrachtung für die vertikale Diskretisierung

Analog zu der in Abschnitt 2.3.4. ausgeführten Stabilitätsbe-  
trachtung der horizontalen Diskretisierung wird hier die ver-  
tikale Auflösung des Gleichungssystems betrachtet. Dazu werden  
die nach  $z$  abgeleiteten Terme - das sind die vertikalen Aus-  
tauschterme - nach der von Neumann'schen Methode untersucht.

$$\mu S_k^{m+1} = \mu S_k^m + \Delta T \left( \frac{T x_{k-1}}{D_{k-1/2}} - \frac{T x_k}{D_{k-1/2}} - \frac{T x_k}{D_{k+1/2}} + \frac{T x_{k+1}}{D_{k+1/2}} \right) \quad (66)$$

mit dem Wellenansatz:

$$\mu S_k^{m+1} = \hat{\mu S}_k^{m+1} e^{i(x \cdot D x)}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_s^{n+1} = \hat{u}_s^n (1 - A_2 + A_1 e^{-i\alpha D_z} + A_3 e^{i\alpha D_z}) \quad (67)$$

$$\text{mit: } A_1 = \frac{DT \cdot Av_{k-1}}{D_{k-1/2} \cdot D_{k-1}}$$

$$A_2 = \frac{DT \cdot Av_k}{D_{k-1/2} \cdot D_k} + \frac{DT \cdot Av_k}{D_{k+1/2} \cdot D_k}$$

$$A_3 = \frac{DT \cdot Av_{k+1}}{D_{k+1/2} \cdot D_{k+1}}$$

Die Stabilitätsbedingung lautet  $|g| \leq 1$ , wobei  $g$  definiert ist durch  $\hat{u}_s^{n+1} = g \cdot \hat{u}_s^n$ .

$$\Rightarrow |g| = |(1 - A_2)^2 + 2A_1^2 + 2A_3^2 + 2(1 - A_2)(A_1 + A_3) \cos \alpha D_z| \leq 1 \quad (68)$$

$$\text{für } Av_i = \text{const. und } D_i = \text{const.} \Rightarrow A_1 = \frac{A_2}{2} = A_3 = A$$

$$\Rightarrow \text{für } A \leq 1/2 \Rightarrow |g| \leq 1 \text{ für alle } \alpha D_z \Leftrightarrow \text{sei } D_i = 600 \text{ cm} \\ D_t = 750 \text{ sec} \Rightarrow Av \leq 240$$

Die Dicke der Bodenschicht ist jedoch nicht konstant, deshalb ist zu prüfen, welchen Bedingungen das  $A_3$  unterliegt.

Sei  $A_3 < A$ , durch Einsetzen von  $A_3 = A - \varepsilon$  in Gleichung (68) sieht man leicht, daß die Stabilitätsbedingung durch die  $\varepsilon$ -Terme nicht verschärft wird. Ist jedoch  $A_3 > A$ ,  $A_3 = A + \varepsilon$ , so wird die Bedingungsgleichung verschärft. Anhand eines Beispiels sieht man, daß die Stabilitätsforderung  $|g| \leq 1$  nicht erfüllt ist. Deshalb wird das bodennahe  $Av_i = \frac{2}{3} \cdot Av_1$  gesetzt, dann ist  $A_1 = \frac{A_2}{2} > A_3$  und damit die Stabilitätsbedingung erfüllt.

Zu untersuchen sind noch die Fälle, in denen  $Tx_{k-1}$  oder  $Tx_{k+1}$  oder beide durch Randbedingungen ersetzt werden, also keine Funktionen von  $u_s$  sind.

Sei  $T_{x_{k-1}} = T_{x_{k+1}} = 0$ ,

(68)  $\Rightarrow |g| \leq 1 \Leftrightarrow |1 - A_2| \leq 1$  ; für  $0 < A_2 \leq 2$  ist die Bedingung erfüllt.

Sei  $T_{x_{k-1}} = T_{x_0} \neq f(us_k)$

(68)  $\Rightarrow |g| \leq 1 \Leftrightarrow |(1 - A_2)^2 + 2 \cdot A_3^2 + 2(1 - A_2)A_3 \cos \alpha \cdot Dz| \leq 1$   
für  $1/2 > \frac{A_2}{2} \gg A_3$  ist die Bedingung erfüllt.

Sei  $T_{x_{k+1}} = T_{x_u} \neq f(us_k)$

(68)  $\Rightarrow |g| \leq 1 \Leftrightarrow |(1 - A_2)^2 + 2 \cdot A_1^2 + 2(1 - A_2)A_1 \cos \alpha \cdot Dz| \leq 1$ ,

diese Gleichung ist symmetrisch zum vorhergehenden Fall, es gilt also die Bedingung  $1/2 > \frac{A_2}{2} \gg A_1$ .

In den Fällen, in denen die bodennahe Schicht  $D_i > 600$  cm ist, ist die Stabilitätsbedingung nicht immer erfüllbar, hier ist eine Bodenreibung notwendig, um das System stabil zu erhalten. Da jedoch Randbedingungen in Stabilitätsbetrachtungen nicht zu berücksichtigen sind, läßt sich die nötige Größenordnung der Bodenreibung hier nicht quantifizieren. In den Rechnungen ist bei der gewählten Bodenreibung, siehe Abschnitt 4.1., keine Instabilität aufgetreten.

### 3.2.4. Der Deformationsradius

In Abschnitt 2.3.2. ist darauf hingewiesen worden, daß die positiven Eigenschaften des benutzten Gitters in Bezug auf Dispersionsfehler nur für  $\frac{\lambda}{Ds} > 1$  gelten, mit  $\lambda$  als Deformationsradius. Für die benutzte Schichtung soll deshalb der Faktor  $\frac{\lambda}{Ds}$  abgeschätzt werden.

Der Deformationsradius im geschichteten Medium ist definiert:

$$\lambda = \frac{1}{f} \left( g \cdot \frac{\Delta g}{g} \cdot D \right)^{1/2} \quad \begin{array}{l} f = \text{Coriolis Beschleunigung} \\ D = \text{vertikale Bewegungsskala} \end{array}$$

mit den in 3.2.2. benutzten Werten für  $g$  und  $\Delta g$  und mit

$$f = 0,11953 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$$

$$g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$Ds = Dx = Dy = 10^5 \text{ cm folgt: sei } D = 20 \text{ m} \Rightarrow \frac{\lambda}{Ds} = 11,5$$

$$\text{sei } D = 6 \text{ m} \Rightarrow \frac{\lambda}{Ds} = 6,3$$

d.h.  $\lambda$  ist erfüllt.



Sei  $Tx_{k-1}=Tx_{k+1}=0$ ,

(68)  $\Rightarrow |g| \leq 1 \Leftrightarrow |1-A_2| \leq 1$  ; für  $0 < A_2 \leq 2$  ist die Bedingung erfüllt.

Sei  $Tx_{k-1}=Tx_0 \neq f(us_k)$

(68)  $\Rightarrow |g| \leq 1 \Leftrightarrow |(1-A_2)^2 + 2 \cdot A_3^2 + 2(1-A_2)A_3 \cos \varphi \cdot Dz| \leq 1$

für  $1/2 > \frac{A_2}{2} > A_3$  ist die Bedingung erfüllt.

Sei  $Tx_{k+1}=Tx_u \neq f(us_k)$

(68)  $\Rightarrow |g| \leq 1 \Leftrightarrow |(1-A_2)^2 + 2 \cdot A_1^2 + 2(1-A_2)A_1 \cos \varphi \cdot Dz| \leq 1$ ,

diese Gleichung ist symmetrisch zum vorhergehenden Fall, es gilt also die Bedingung  $1/2 > \frac{A_2}{2} > A_1$ .

In den Fällen, in denen die bodennahe Schicht  $D_i > 600$  cm ist, ist die Stabilitätsbedingung nicht immer erfüllbar, hier ist eine Bodenreibung notwendig, um das System stabil zu erhalten. Da jedoch Randbedingungen in Stabilitätsbetrachtungen nicht zu berücksichtigen sind, läßt sich die nötige Größenordnung der Bodenreibung hier nicht quantifizieren. In den Rechnungen ist bei der gewählten Bodenreibung, siehe Abschnitt 4.1., keine Instabilität aufgetreten.

### 3.2.4. Der Deformationsradius

In Abschnitt 2.3.2. ist darauf hingewiesen worden, daß die positiven Eigenschaften des benutzten Gitters in Bezug auf Dispersionsfehler nur für  $\frac{\lambda}{Ds} > 1$  gelten, mit  $\lambda$  als Deformationsradius. Für die benutzte Schichtung soll deshalb der Faktor  $\frac{\lambda}{Ds}$  abgeschätzt werden.

Der Deformationsradius im geschichteten Medium ist definiert:

$$\lambda = \frac{1}{f} \left( g \cdot \frac{\Delta g}{g} \cdot D \right)^{1/2} \quad \begin{array}{l} f = \text{Coriolis Beschleunigung} \\ D = \text{vertikale Bewegungsskala} \end{array}$$

mit den in 3.2.2. benutzten Werten für  $g$  und  $\Delta g$  und mit

$$f = 0,11953 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$$

$$g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$Ds = Dx = Dy = 10^5 \text{ cm folgt: sei } D = 20 \text{ m} \Rightarrow \frac{\lambda}{Ds} = 11,5$$

$$\text{sei } D = 6 \text{ m} \Rightarrow \frac{\lambda}{Ds} = 6,3$$

d.h.  $\frac{\lambda}{Ds} > 1$  ist erfüllt.

## 4. MODELLRECHNUNGEN

### 4.1. PARAMETERWAHL UND ANFANGSZUSTAND

In allen berechneten Fällen wird vom Anfangszustand der Ruhe ausgegangen, im baroklinen Modell wird die Dichte, bzw. der Salzgehalt horizontal konstant vorgegeben. Damit ist das Gleichungssystem identisch erfüllt, so daß keine Anpassungsrechnungen nötig werden.

Die einzige äußere Kraft, die das Modell enthält, ist der Windstress. Er wird so vorgegeben, daß er vom Zeitpunkt  $t=0$  bis  $t=T$  linear auf einen bestimmten Wert anwächst. Gibt man den Windstress als Sprungfunktion vor, so führt das zur Anregung von Seiches (SIMONS, 1980). Die Anstiegszeit des Windstresses  $T$  sollte größer sein als die Seichesperiode, nach Möglichkeit ein ganzzahliges Vielfaches der Seichesperiode betragen (SIMONS, 1980). Wenn man die Kieler Bucht durch ein rechteckiges Becken approximiert, folgt nach der Merian'schen Formel eine Seichesperiode von ca. 2,5 - 4 Std., abhängig von den Abmessungen des Beckens. In allen Rechnungen mit idealisierten Windfeldern wurde eine lineare Anstiegszeit von  $T=16$  Std. genommen. Sie sollte ausreichen, keine Seiches zu erzeugen, da in einem System mit Reibung die Seiches nach einigen Perioden weggedämpft sind.

Nachfolgend seien die im Modell verwandten Parameter zusammengefaßt:

$$Ah = 10^6$$

$$Av_1 = 30$$

$$Av_2 = 30$$

$$Av_3 = 20$$

$$AhS = 10^5$$

$$AvS = 1$$

$$T_0^{(x)} = c_D \cdot \rho_L \cdot u_w^2$$

$$T_0^{(y)} = c_D \cdot \rho_L \cdot v_w^2$$

mit  $c_D = 2,1 \cdot 10^{-3}$ , wo nicht anders angegeben,

$$\rho_L = 1,225 \cdot 10^{-3} \text{ cgs}$$

$u_W$  = u-Komponente der Windgeschwindigkeit in 10 m Höhe

$v_W$  = v-Komponente der Windgeschwindigkeit in 10 m Höhe

$$T_B^{(x)} = r \cdot |A_0| \cdot u$$

$$T_B^{(y)} = r \cdot |A_0| \cdot v$$

mit  $r = 3 \cdot 10^{-3}$ , wo nicht anders angegeben,

$$f = 0,11953 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$$

Salzgehaltsprofil:

$s_1$	=	15 ‰
$s_2$	=	20 ‰
$s_3$	=	23 ‰
$s_4$	=	26 ‰

$$\text{Transformationsgleichung: } B(x) = \sum_{i=1}^5 i \cdot A_i \cdot x^{i-1}$$

$$D_s = 10^5 \text{ cm}$$

$$DT_{\text{Schwereterme}} = 50 \text{ sec}$$

$$DT_{\text{sonst. Terme des externen Gleichungssystems}} = 250 \text{ sec}$$

$$DT_{\text{internes Gleichungssystem}} = 750 \text{ sec}$$

Anzahl der Gitterpunkte : 6458

Anzahl der Gitterpunkte im Bereich Beltsee : 3214

Anzahl der Gitterpunkte im Bereich Kieler Bucht : 1467

#### 4.2. MODELLANWENDUNGEN

Das Modell soll die Reaktion der Kieler Bucht auf großräumige Windfelder simulieren. Als erster Schritt werden "typische" Strömungsbilder berechnet und der Einfluß verschiedener Effekte untersucht. Unter einem "typischen" Strömungsbild sei hier die quasistationäre Reaktion auf ein idealisiertes Windfeld verstanden. Im folgenden werden bis auf die Abschnitte 4.2.5. und 4.2.6. räumlich und zeitlich konstante Windfelder betrachtet.

Die folgenden Abbildungen 9 - 26 zeigen quasistationäre Zustände für die vier Hauptwindrichtungen sowie für Südostwind. Wieviel Simulationszeit nötig ist, um den quasistationären Zustand zu erreichen, wird in Abschnitt 4.2.4. behandelt.

Für Süd- und für Westwind sind die mittleren Geschwindigkeiten über die Gesamttiefe, die mittleren Geschwindigkeiten in den einzelnen Schichten und die Oberflächenauslenkung dargestellt. Bei nördlichen Winden ähnelt sich das Strömungsbild sehr stark dem für südliche Winde mit umgekehrtem Vorzeichen; Ostwind produziert den entgegengesetzten Fall zum Westwind. Deshalb sind für Nord- und Ostwind als Beispiel nur je zwei Bilder der mittleren Geschwindigkeit über die Gesamttiefe und die Oberflächenströmung dargestellt.

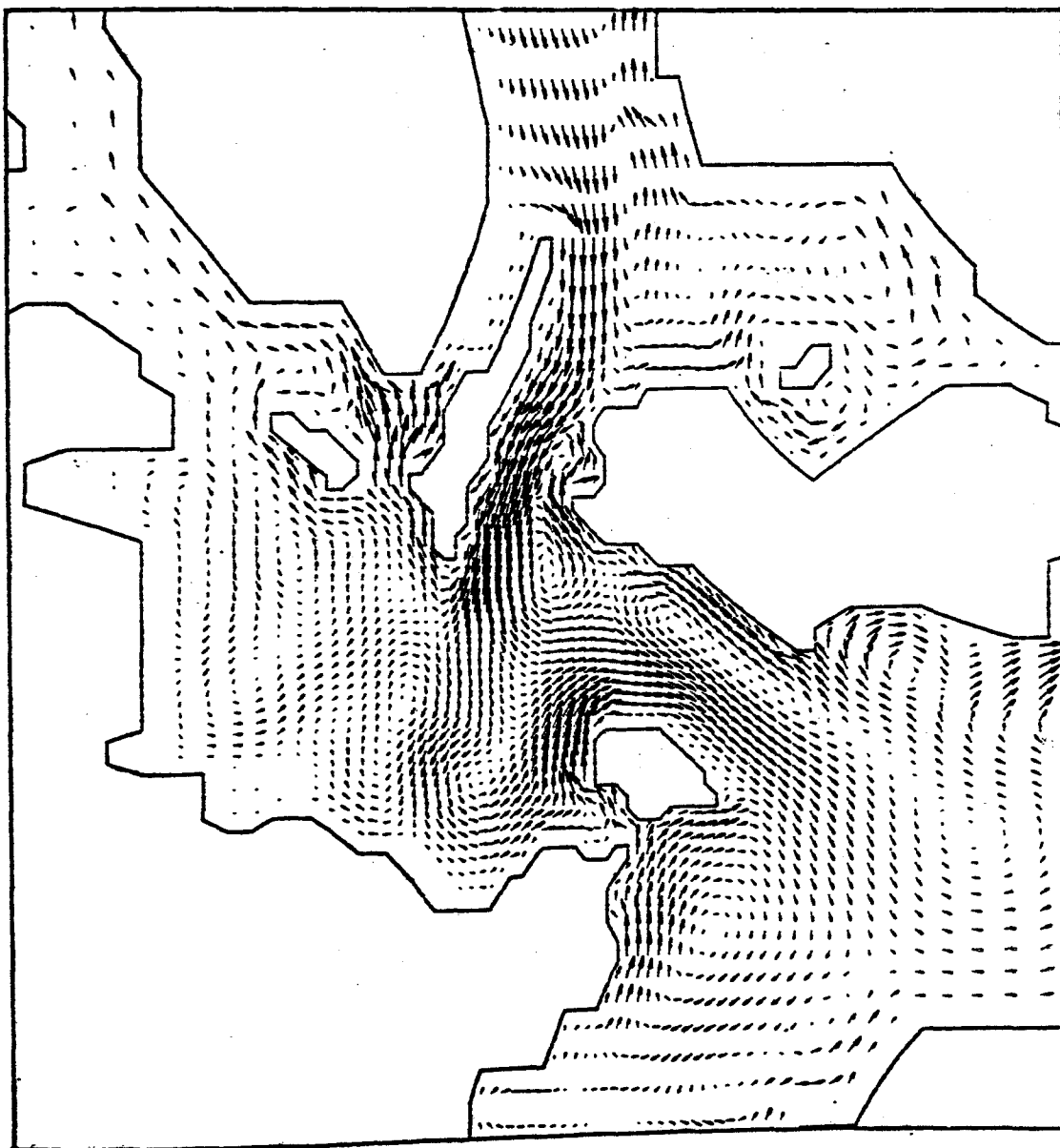


Abb. 9: Mittlere Strömung der Kieler Bucht  
bei Südwind,  $|\tau| = 1.6$  cgs,  
nach 87.5 Std. Simulationszeit  
 $\rightarrow = 20 \text{ cm sec}^{-1}$

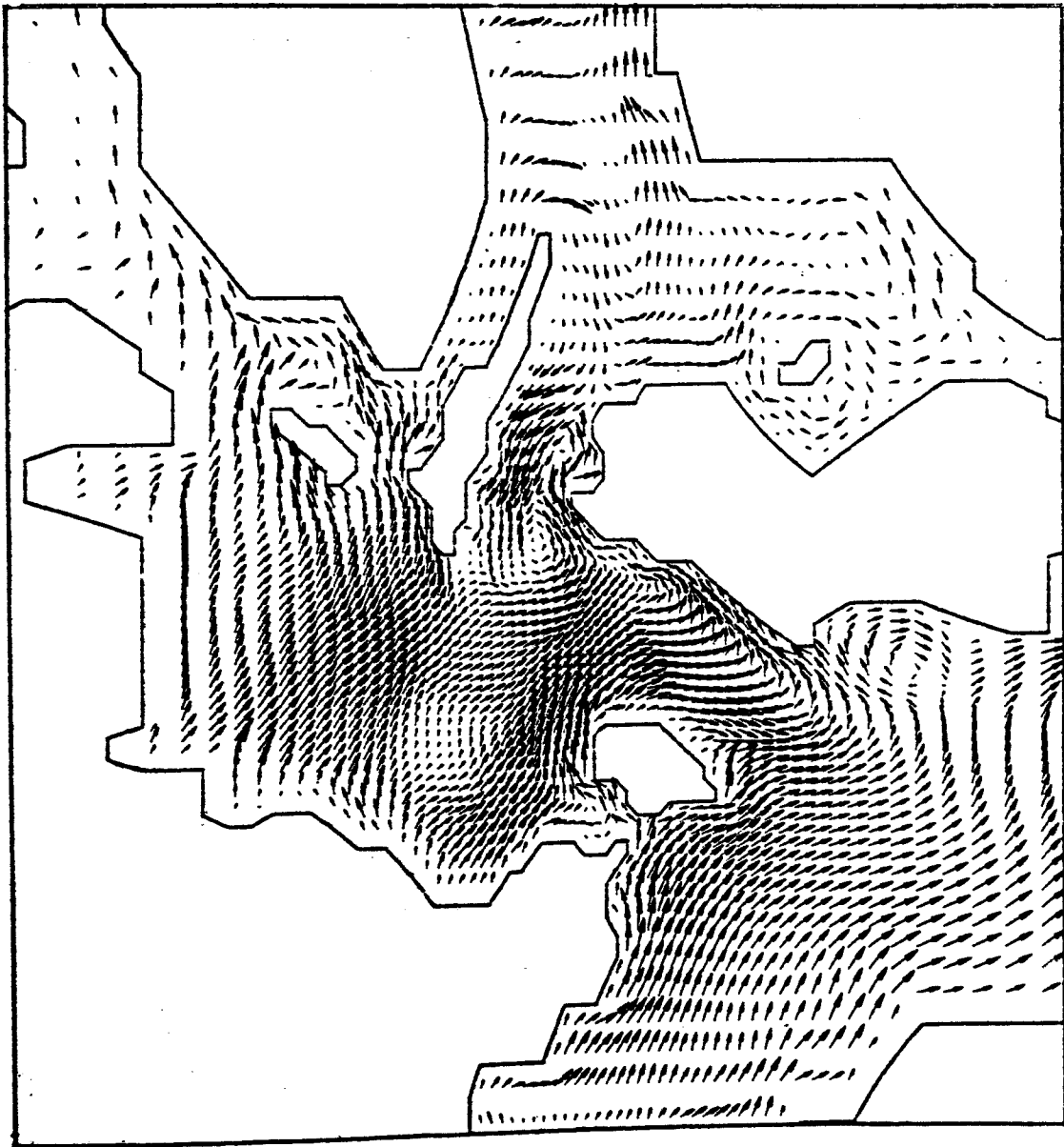


Abb. 10: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 1 (0-6m)  
bei Südwind,  $|\vec{u}| = 1.6$  cgs.,  
nach 87.5 Std. Simulationszeit  
 $\rightarrow :: 20 \text{ cm sec}^{-1}$

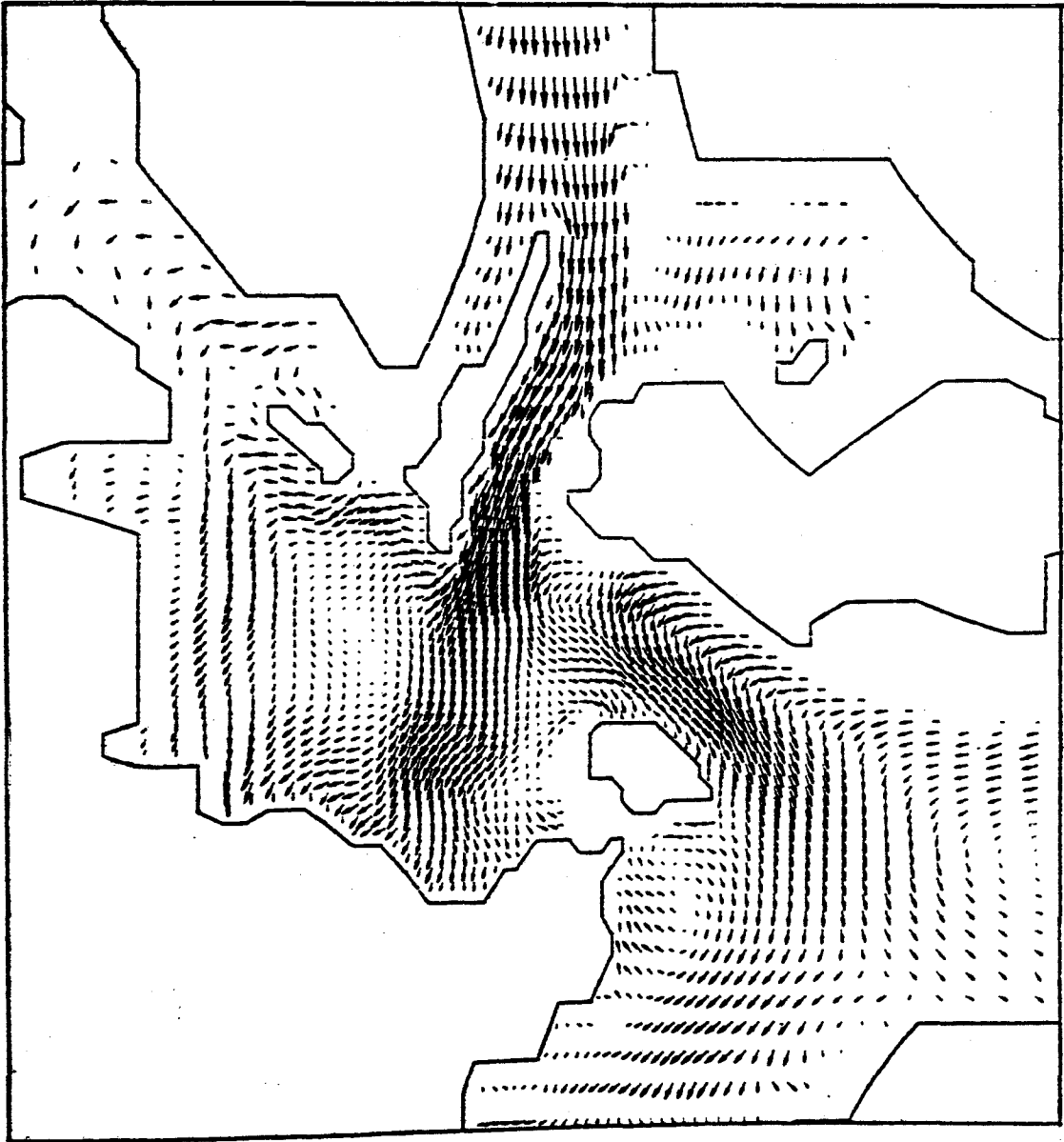


Abb. 11: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 2 (6-12 m)  
bei Südwind,  $\tau = 1.6$  cgs.,  
nach 87.5 Std. Simulationszeit.  
 $\rightarrow := 20 \text{ cm sec}^{-1}$

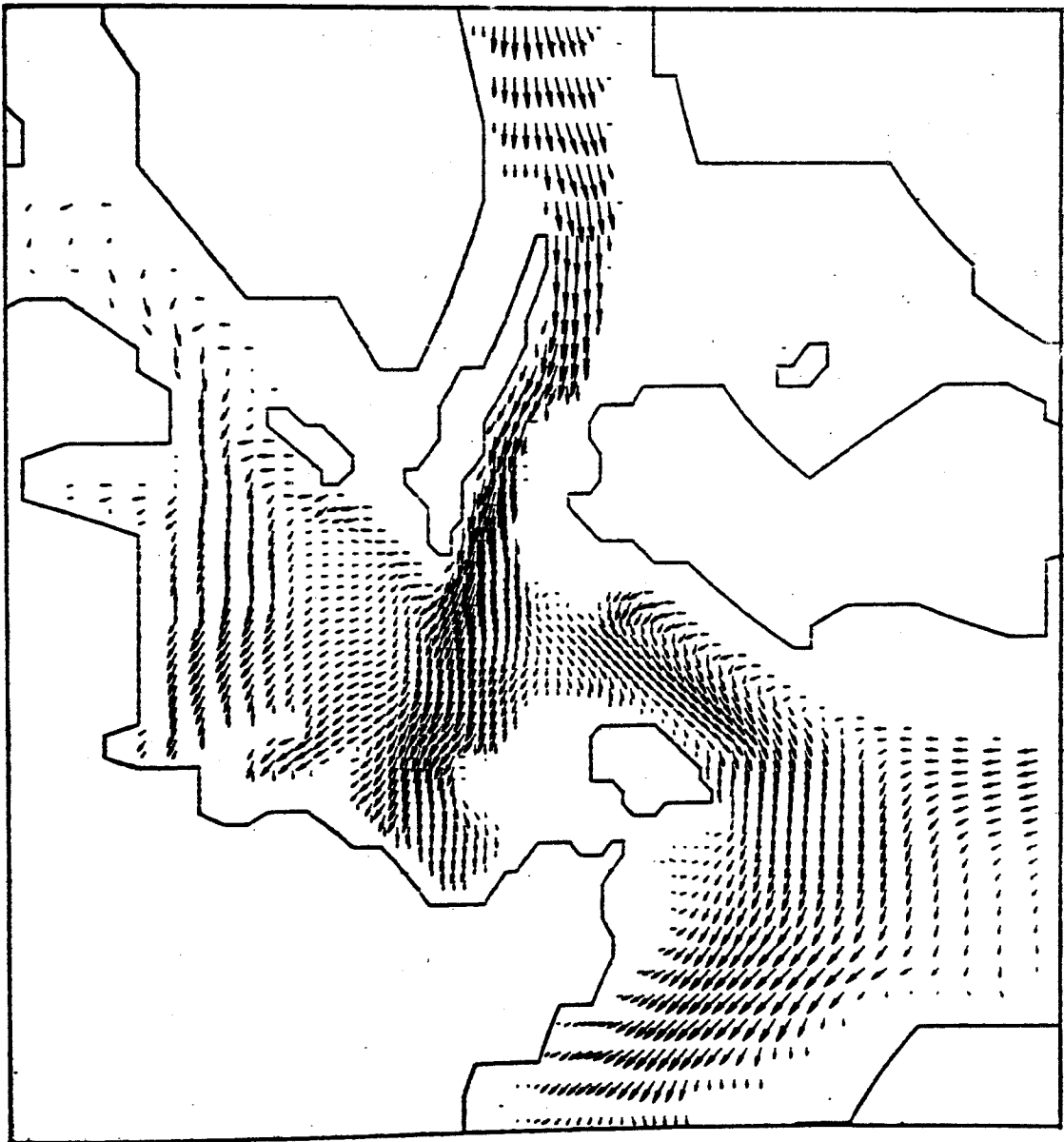


Abb. 12: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 3 (12-18 m)  
bei Südwind,  $|U| = 1.6$  cgs.,  
nach 87.5 Std. Simulationszeit.  
→  $\equiv 20 \text{ cm sec}^{-1}$



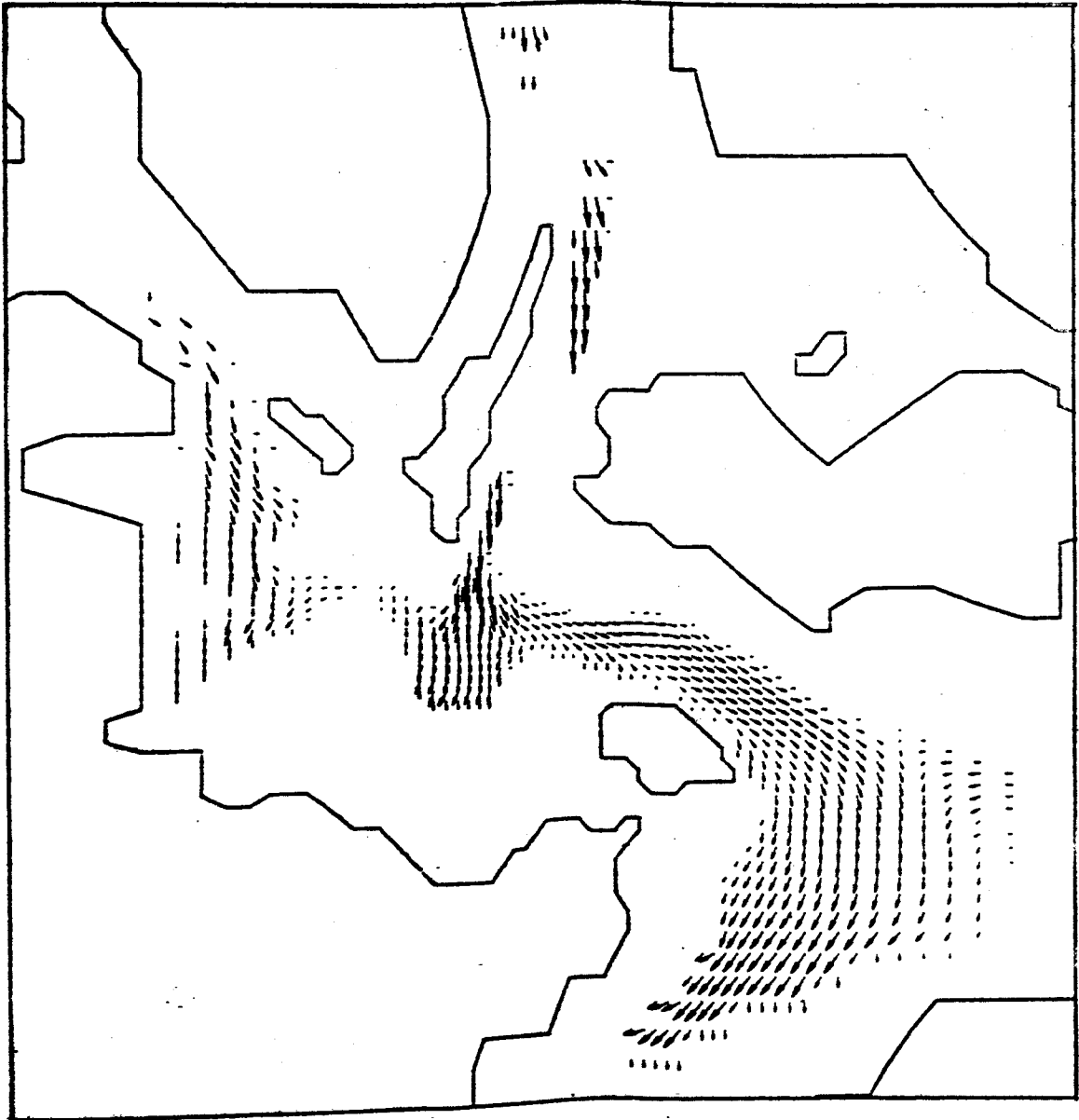


Abb. 13: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 4 (18m-Boden)  
bei Südwind,  $|\tau| = 1.6 \text{ cgs.}$ ,  
nach 87.5 Std. Simulationszeit.  
 $\rightarrow := 20 \text{ cm sec}^{-1}$

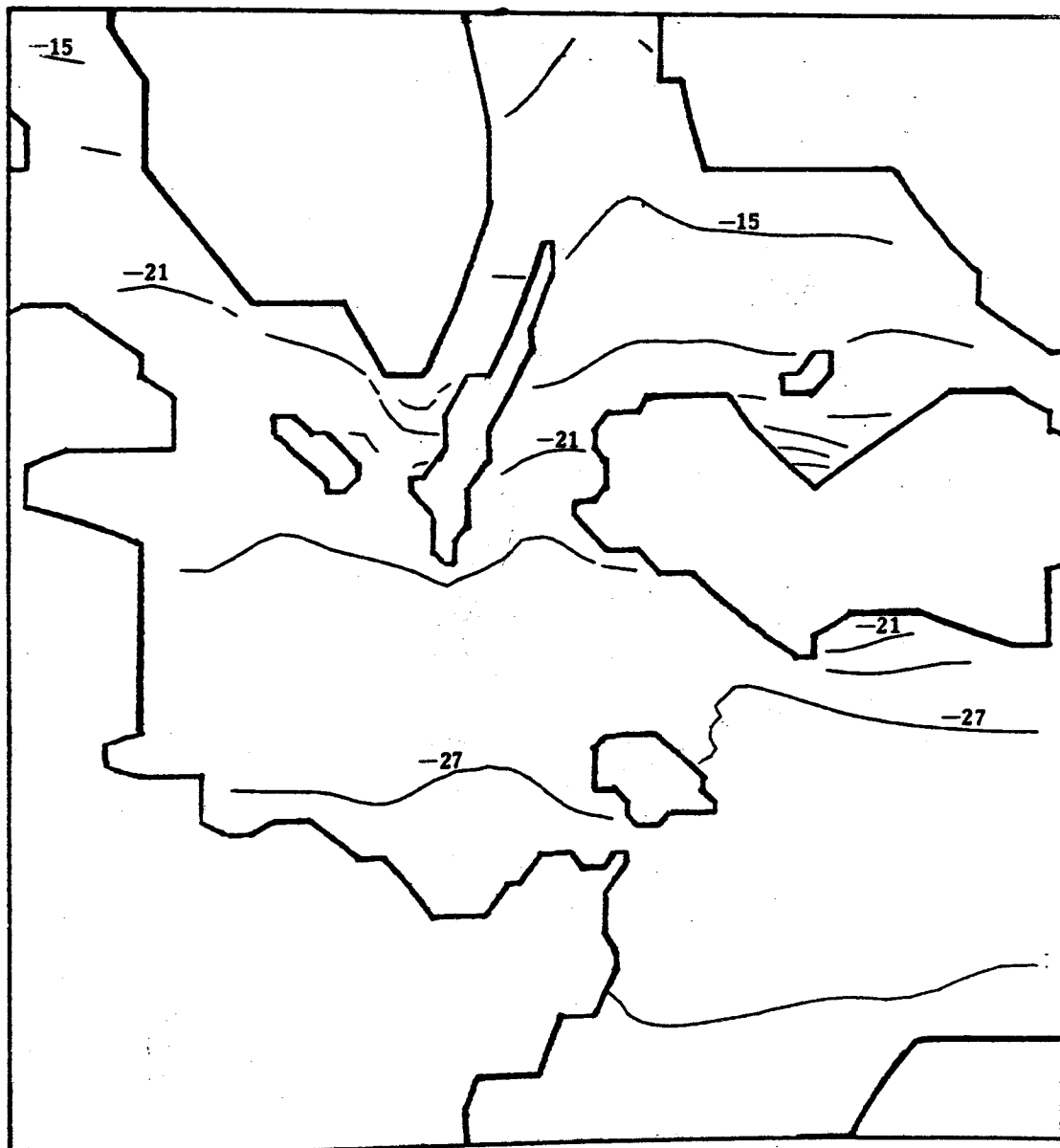


Abb. 14: Oberflächenauslenkung der Kieler Bucht in cm,  
bei Südwind,  $\tau = 1.6$  cgs.,  
nach 87.5 Std. Simulationszeit.

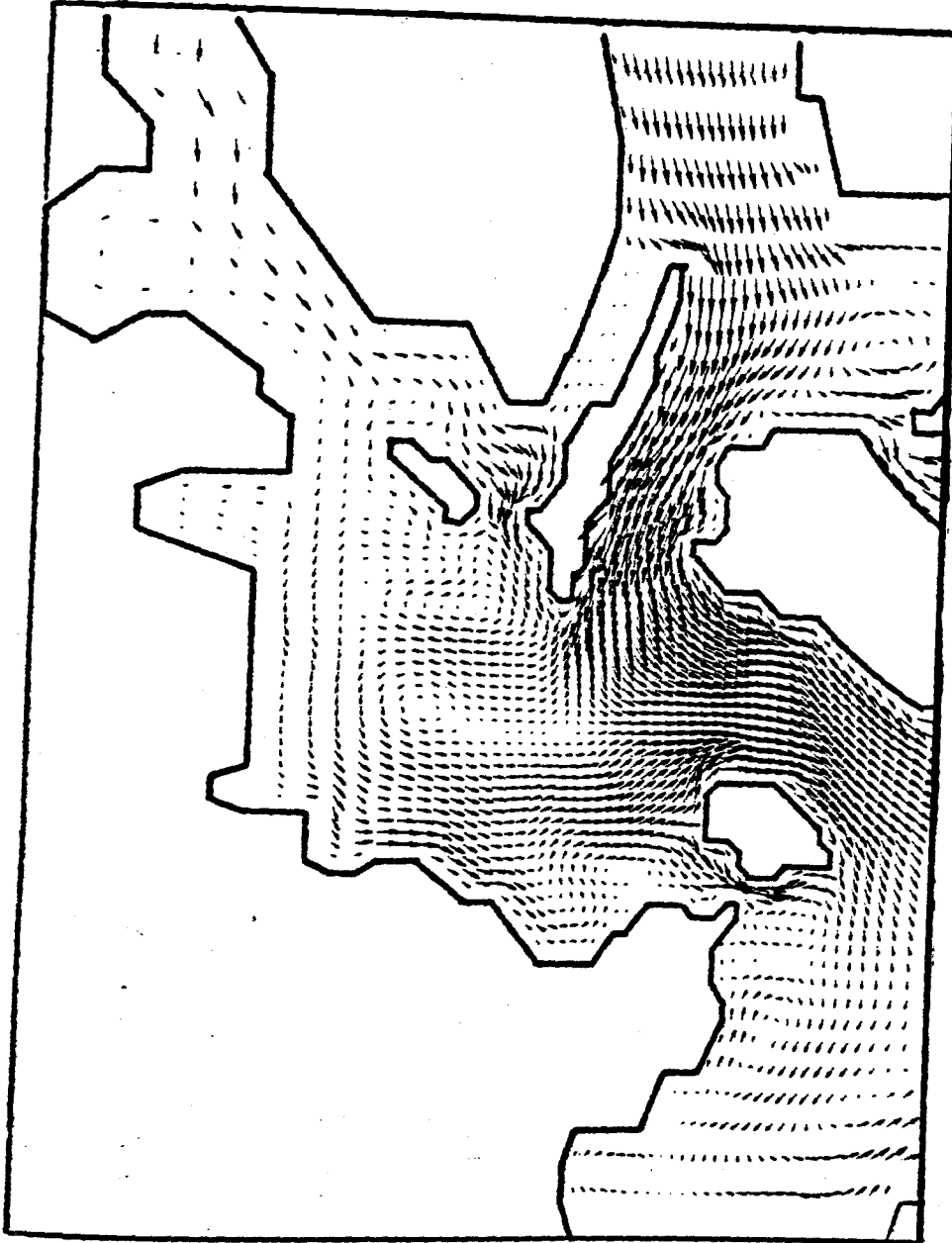


Abb. 15: Mittlere Strömung der Kieler Bucht  
bei Westwind,  $|\tau| = 1.6$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.  
→  $\equiv 20 \text{ cm sec}^{-1}$

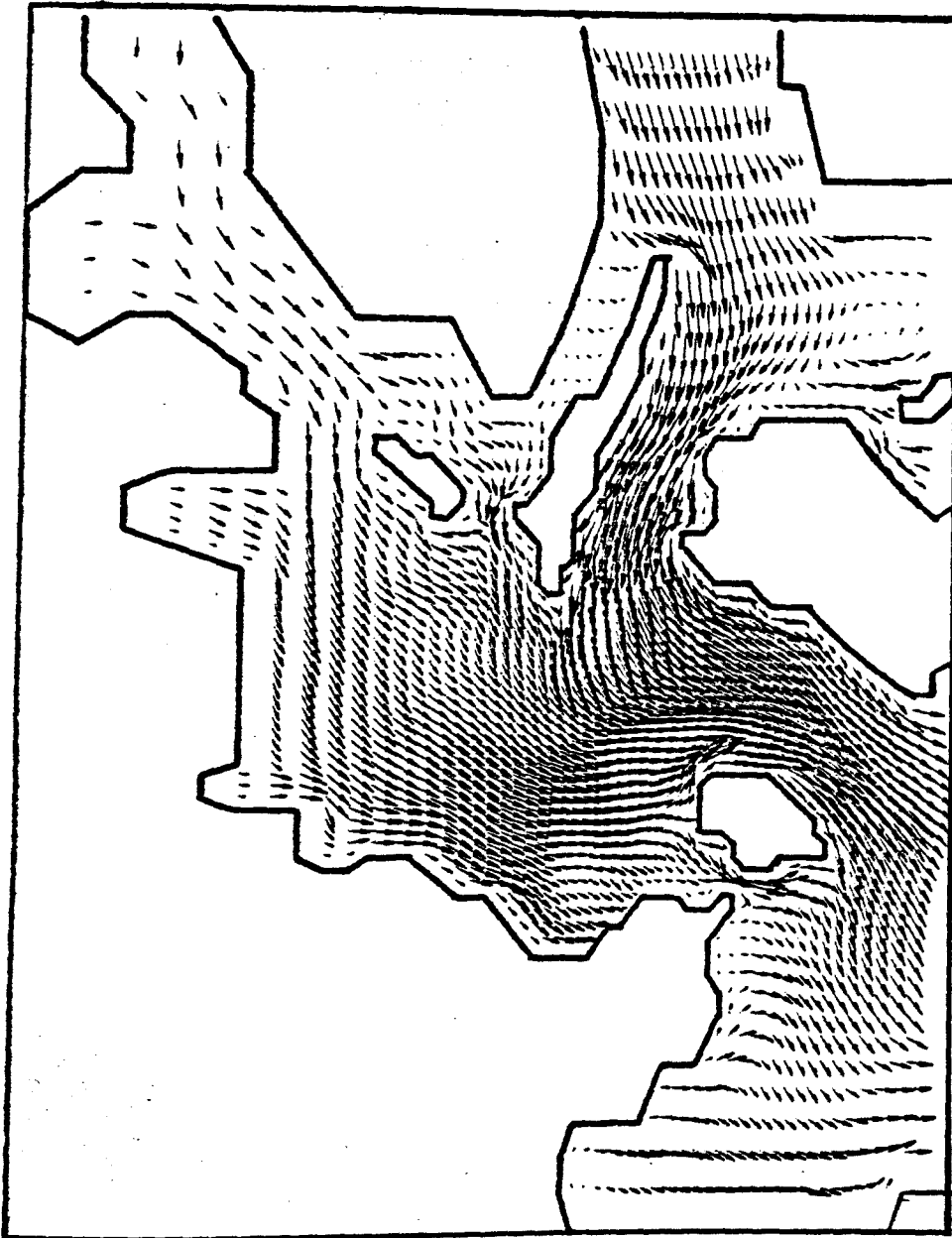


Abb. 16: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 1 (0-6m)  
bei Westwind,  $|\tau| = 1.6$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.  
→  $:= 20 \text{ cm sec}^{-1}$

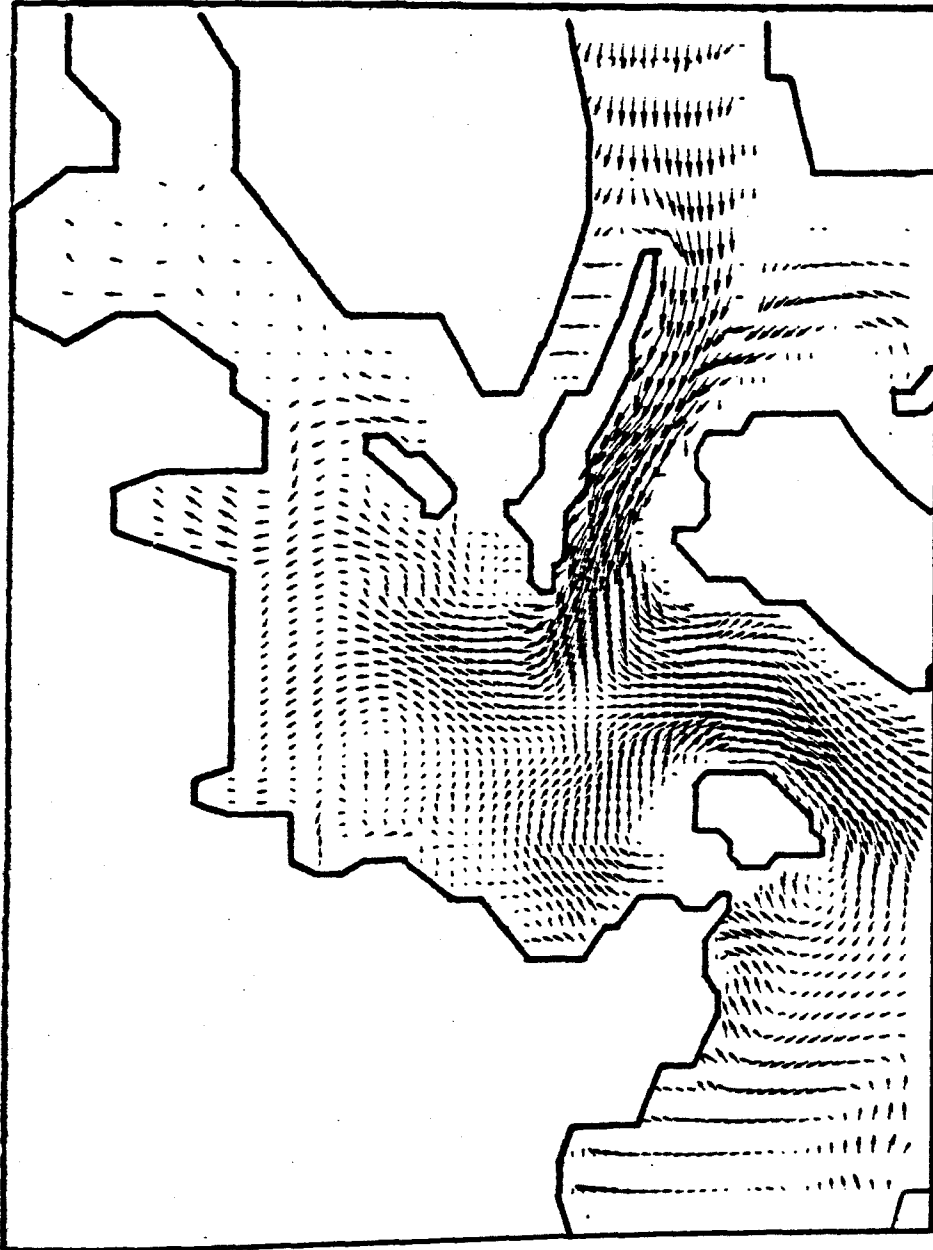


Abb. 17: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 2 (6-12m)  
bei Westwind,  $|\tau| = 1.6$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.  
→  $:= 20 \text{ cm sec}^{-1}$

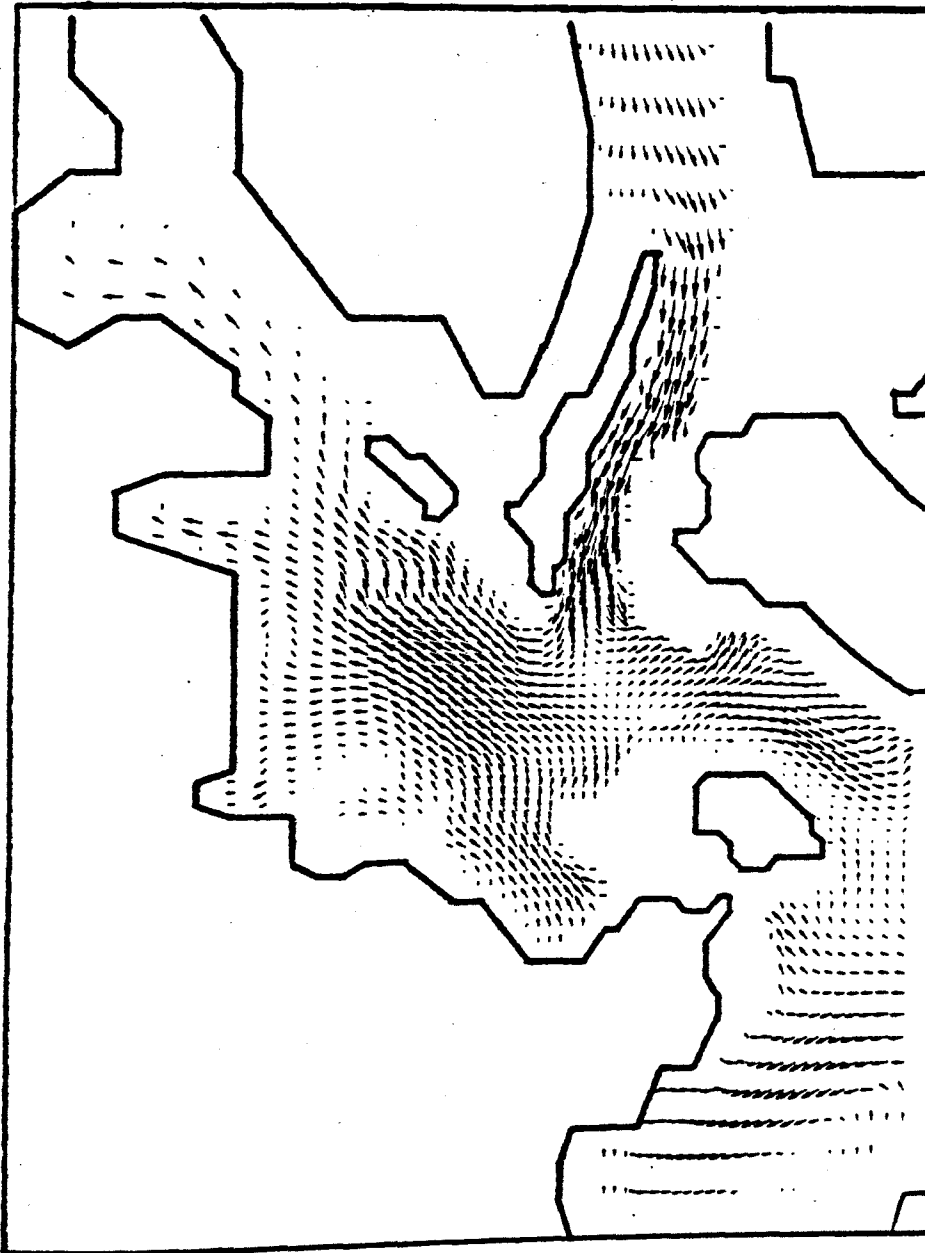


Abb. 18: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 3 (12-18 m)  
bei Westwind,  $|\tau| = 1.6$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.  
→  $\equiv 20 \text{ cm sec}^{-1}$

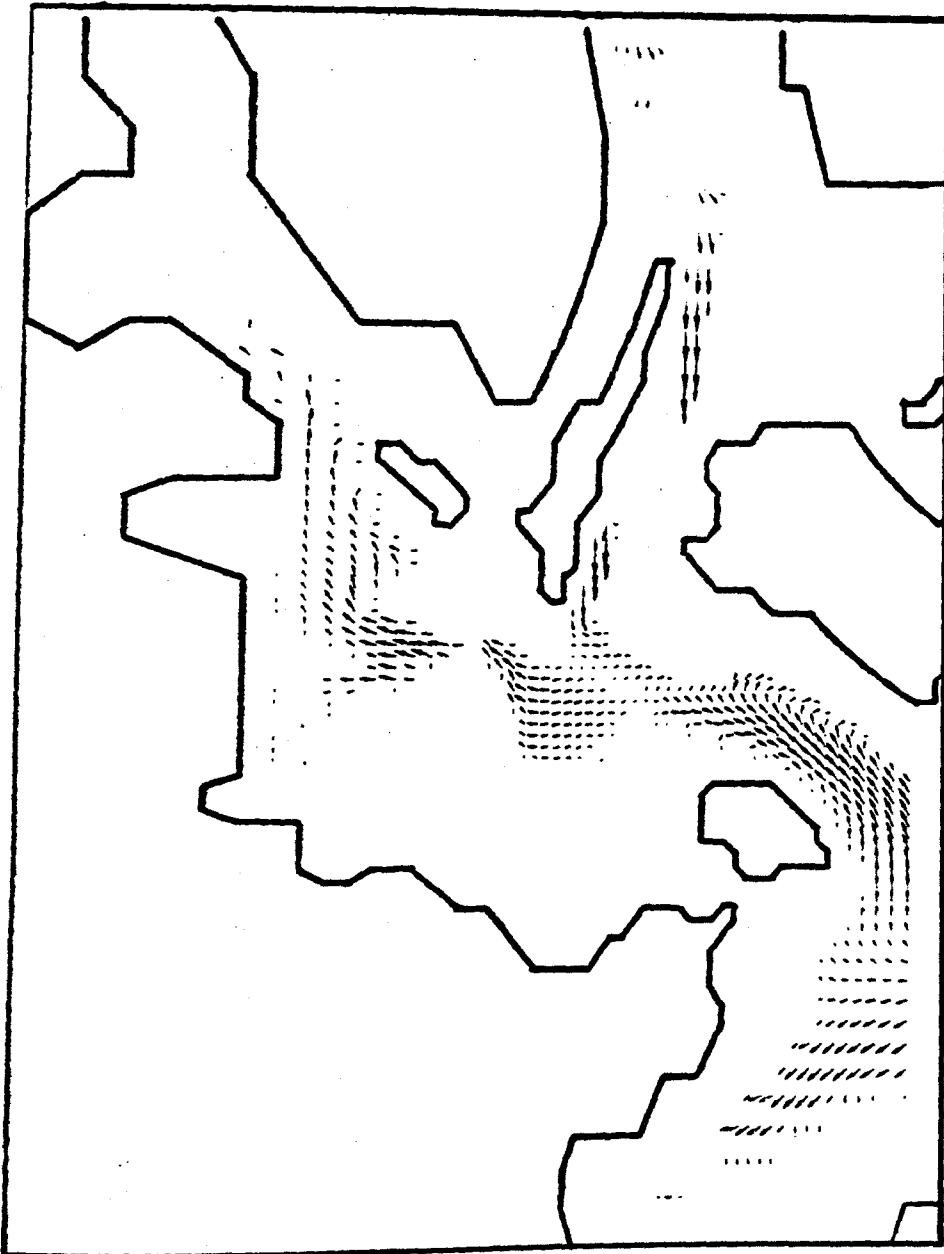


Abb. 19: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 4 (18m -Boden)  
bei Westwind,  $|Z| = 1.6$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.  
→  $\equiv 20 \text{ cm sec}^{-1}$

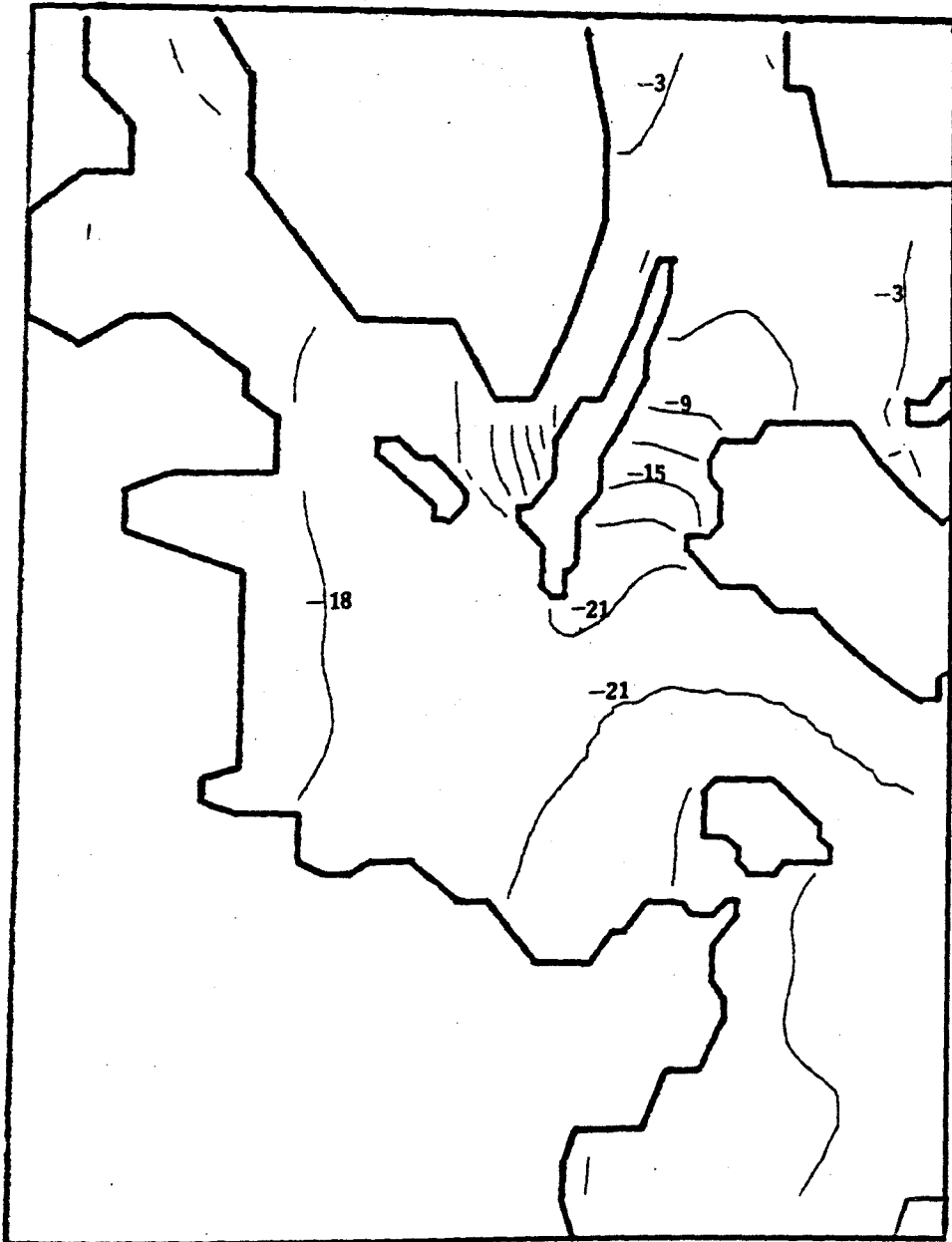


Abb. 20: Oberflächenauslenkung der Kieler Bucht in cm  
bei Westwind,  $|\tau| = 1.6$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.



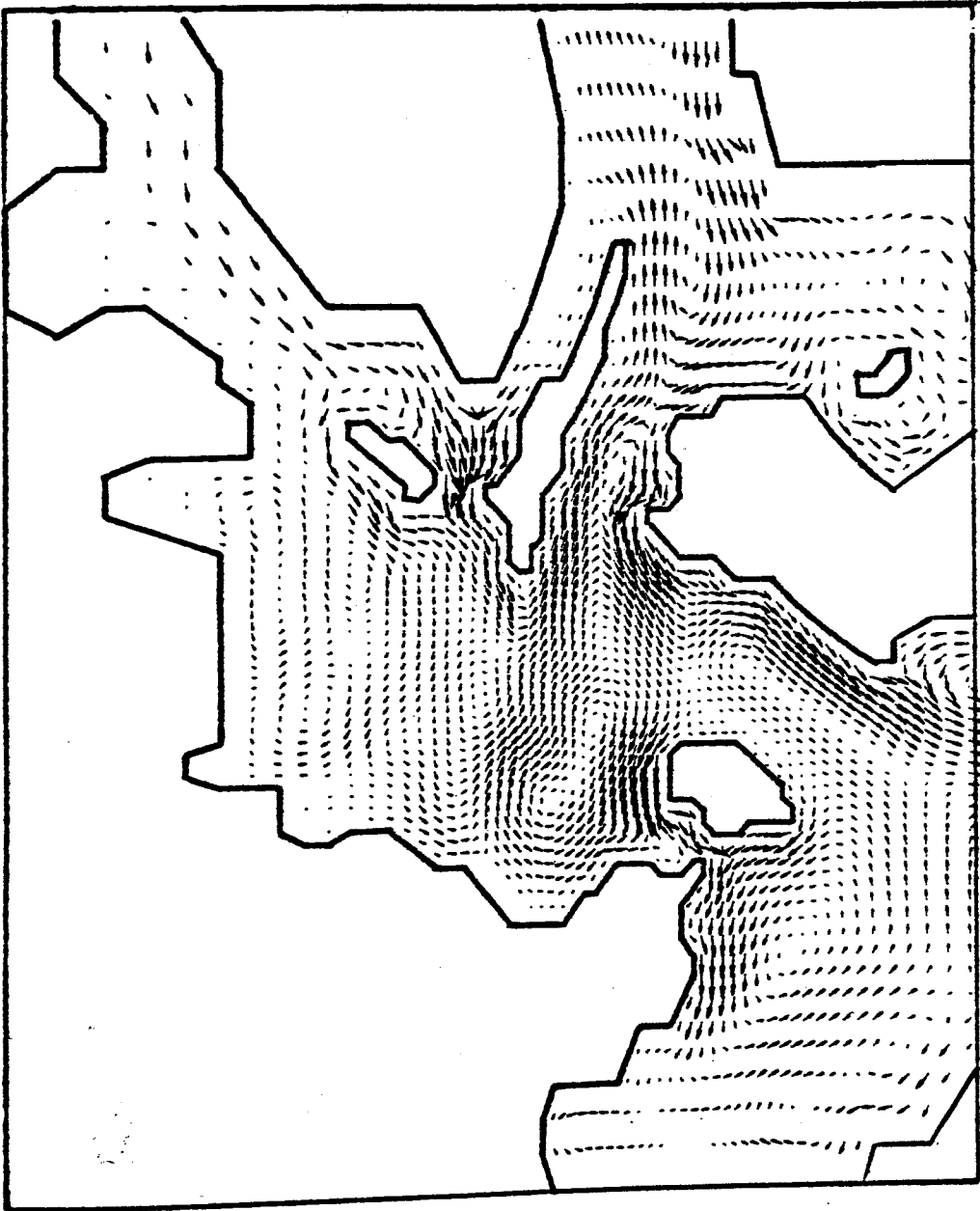


Abb. 21: Mittlere Strömung der Kieler Bucht  
bei Nordwind,  $|\Gamma| = 1.6$  cgs.,  
nach 41.7 Std. Simulationszeit.  
→  $:= 20 \text{ cm sec}^{-1}$

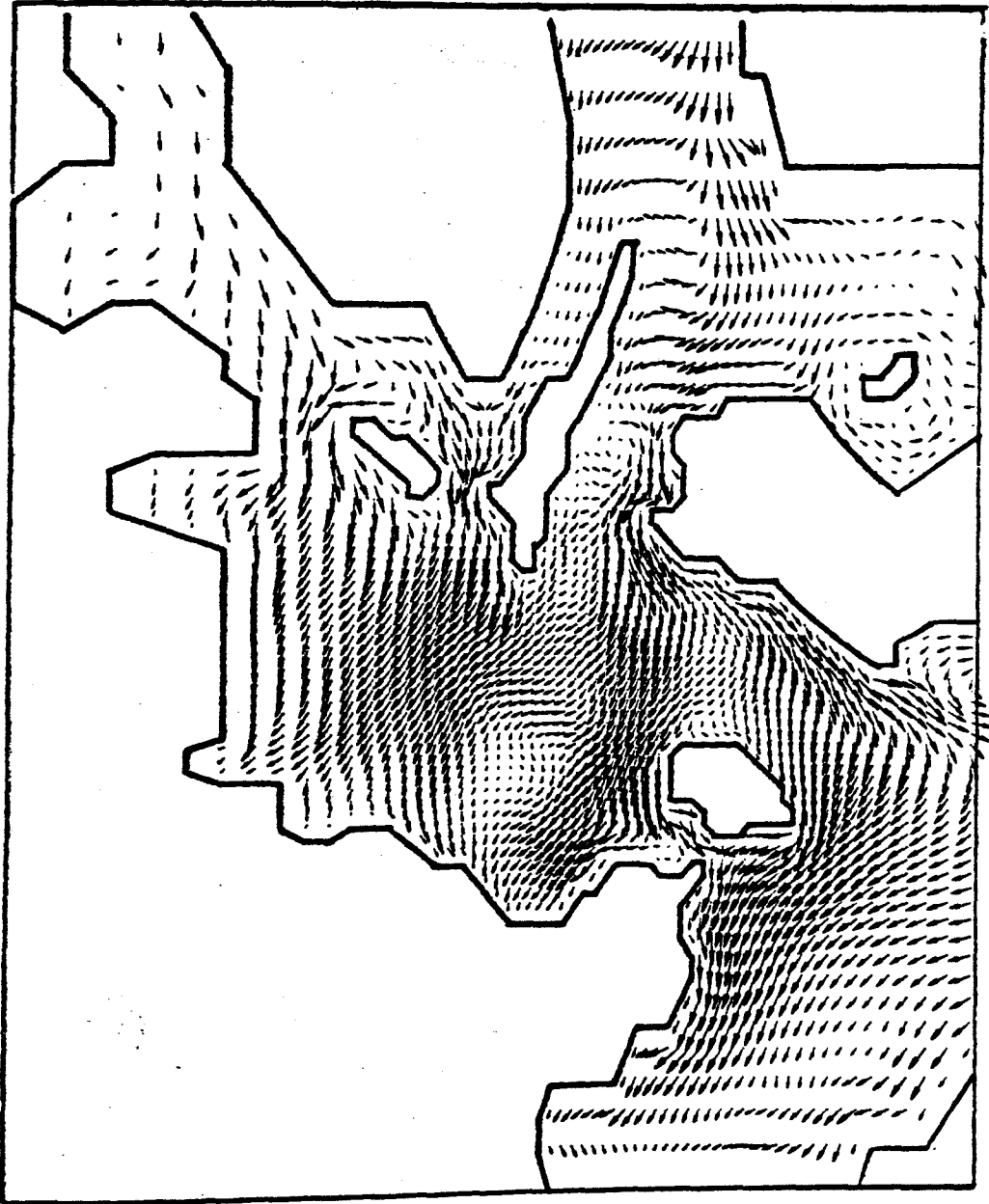


Abb. 22: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 1 (0-6 m)  
bei Nordwind,  $|\tau| = 1.6$  cgs.,  
nach 41.7 Std. Simulationszeit.  
→ := 20 cm sec<sup>-1</sup>

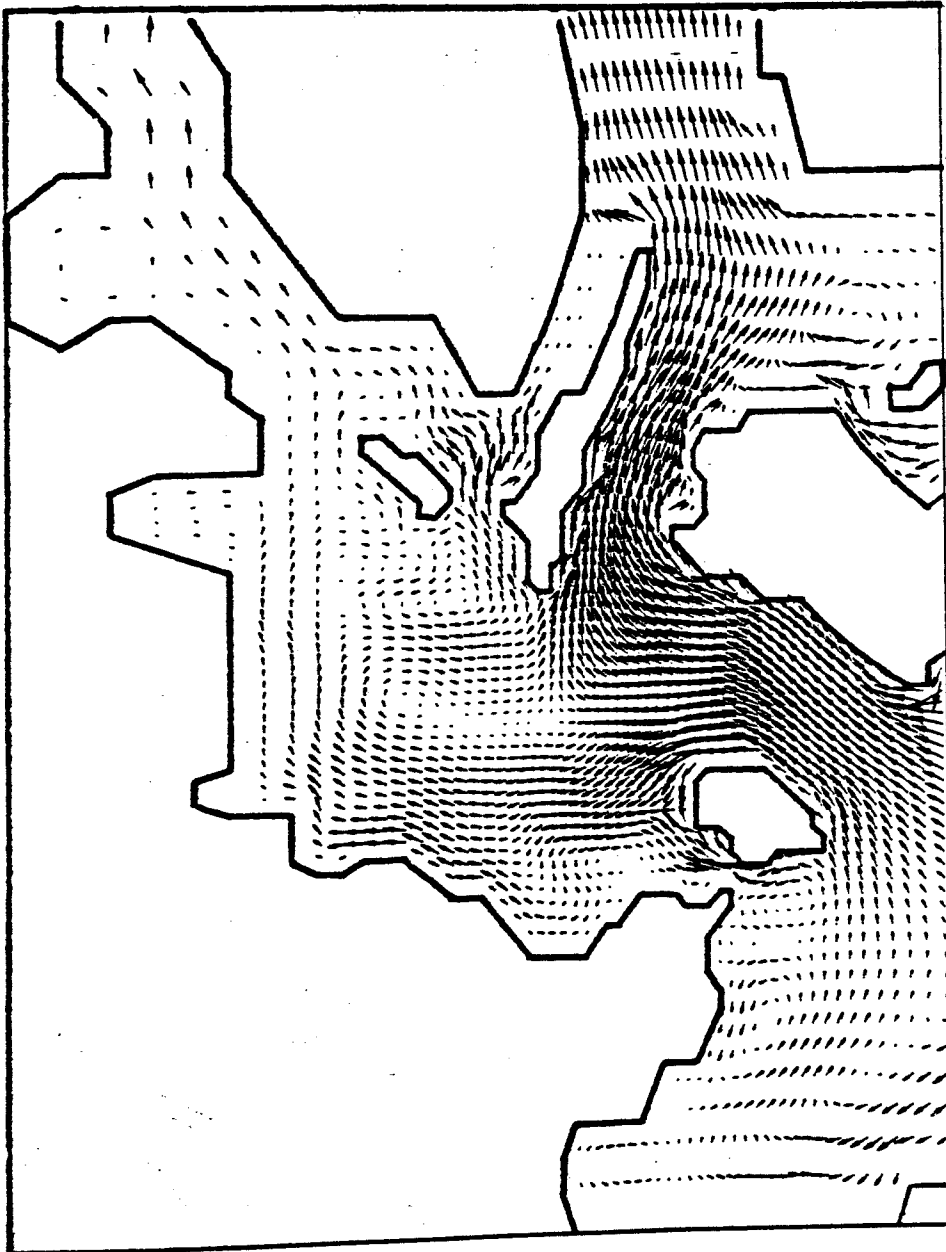


Abb. 23: Mittlere Strömung der Kieler Bucht  
bei Ostwind,  $|v| = 1.6$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.  
→  $\equiv 20 \text{ cm sec}^{-1}$



Abb. 24: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 1 (0-6 m)  
bei Ostwind,  $|\tau| = 1.6$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.  
→  $:= 20 \text{ cm sec}^{-1}$



Abb. 25: Mittlere Strömung der Kieler Bucht  
bei Südostwind,  $|\vec{v}| = 3.2$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.  
→  $:= 20 \text{ cm sec}^{-1}$

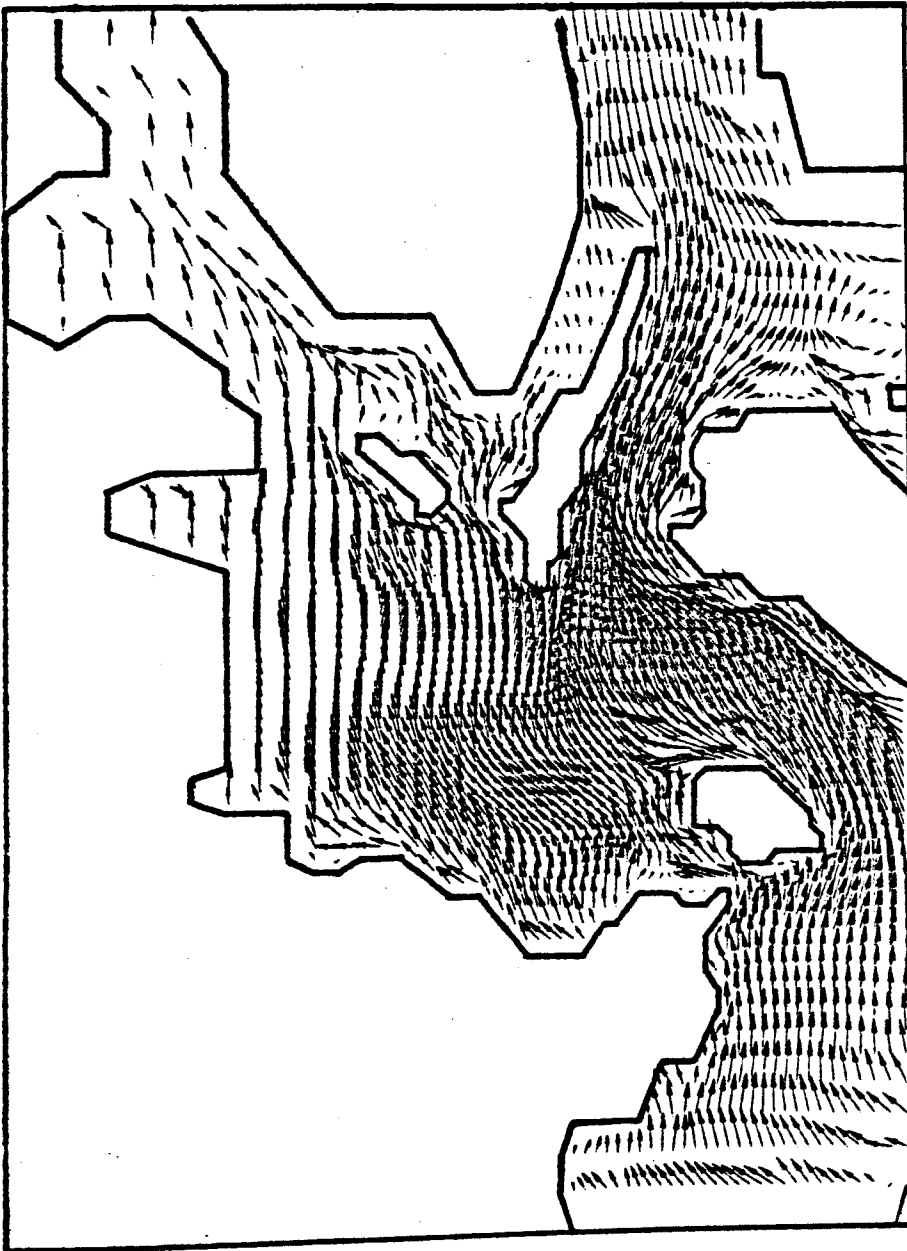


Abb. 26: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 1 (0- 6 m)  
bei Südostwind,  $|\tau| = 3.2$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.  
→  $:= 20 \text{ cm sec}^{-1}$

#### 4.2.1. Ergebnisse im grob aufgelösten Gebiet

Ziel des Modelles ist es, die Strömungsverhältnisse in der Kieler Bucht zu simulieren. An die Qualität der Simulation von Nord- und Ostsee werden keine so hohen Anforderungen gestellt, Nord- und Ostsee sollen im wesentlichen die Bedingungen in den Belten adäquat produzieren. Um eine Vorstellung davon zu bekommen, welche Phänomene in Nord- und Ostsee noch aufgelöst werden, werden die Ergebnisse dieses Modells mit einem Modell der Ostsee, das von J. KIELMANN entwickelt wurde, im folgenden KIELMANN-Modell genannt, verglichen (KIELMANN, 1981). Das KIELMANN-Modell hat einen äquidistanten Gitterabstand von  $10 \times 10$  km; es ist ebenfalls ein lineares explizites Finite-Differenzen-Modell mit mehreren Schichten. Die Kopplung zwischen den Schichten wird in beiden Modellen gleich gehandhabt, jedoch benutzt KIELMANN ein anderes Gitter und infolgedessen auch eine andere räumliche und zeitliche Diskretisierung. Im KIELMANN-Modell wird außerdem eine andere Anfangsdichteverteilung vorgegeben als im obigen Modell. Deshalb können die Simulationen nur für ein homogenes Gebiet oder für wenige Tage Simulationszeit verglichen werden, so daß die baroklinen Effekte noch keine starke Wirkung zeigen.

Abb. 27 zeigt den Volumentransport des KIELMANN-Modells nach 5 Tagen Südwind bei offenen Rändern im Westen, Abb. 28 und 29 die entsprechenden Ergebnisse des vorliegenden Modells. Als größter Unterschied fällt die rege Wirbeltätigkeit zwischen Gotland und Ösel (Gebiet C) im KIELMANN-Modell auf. Wirbel dieser Größenordnung aber können im vorliegenden Kieler Bucht-Modell nicht aufgelöst werden, das gilt auch für die Wirbel östlich von Bornholm und östlich von Öland, Gebiet A und B. Die Wirbel haben aber auf die Kieler Bucht sicherlich keinen Einfluß, wichtig ist für die Kieler Bucht nur, daß der großräumige Massentransport im Inneren der Ostsee richtig simuliert wird. Die starken Volumentransporte in der westlichen und mittleren Ostsee, die in Abb. 28 mit 1 - 7 gekennzeichnet sind, sind aber mit dem besser aufgelösten KIELMANN-Modell

konsistent. In den mit 8 bis 10 bezeichneten Regionen ist die Obereinstimmung weniger gut. Während bei KIELMANN die Zirkulation im Bottnischen Meerbusen fast abgeschlossen ist und nur an der westlichen Berandung ein schwacher Ausstrom in die Ostsee herrscht, ist im vorliegenden Modell, in dem die Åland Inseln nicht aufgelöst werden, der Austausch wesentlich stärker. Die Nettotransporte aus dem Bottnischen Meerbusen unterscheiden sich jedoch nicht so sehr, daß das Strömungsverhalten der Inneren Ostsee von den unterschiedlichen Verhältnissen am Eingang des Bottnischen Meerbusens beeinflußt würden.

Am offenen Rand des KIELMANN-Modells im Fehmarnbelt herrscht Ausstrom, im vorliegenden Modell jedoch - wie Abb. 29 zeigt - herrscht Nettoeinstrom.

Abb. 30 - Schnitt 1 - zeigt, wie sich bei Südwind in den ersten drei Tagen Ein- und Ausstrom durch den Fehmarnbelt abwechseln, danach scheint sich der quasistationäre Zustand mit schwachem Nettoeinstrom einzupendeln. Das scheint dem Ergebnis des KIELMANN-Modells, das ebenfalls den quasistationären Zustand darstellt, zu widersprechen. Zur Klärung des Widerspruchs sei auf Abb. 31 verwiesen. Zwischen der westlichen Ostsee und dem Fehmarnbelt besteht eine relative Wasserstands Differenz, die zu Ausstrom aus der Ostsee führen würde, wenn sich nicht zwischen dem Fehmarnbelt und dem Skagerrak ein Stau aufgebaut hätte, der zu einem starken Gegenstrom führte. Sein Einfluß dominiert, so daß ein Nettoeinstrom in die Ostsee resultiert. Deutlich wird die Konkurrenz zwischen Ein- und Ausstrom auch in Abb. 29: an der nordöstlichen Berandung des Fehmarnbelts, der Küste Lollands, besteht Ausstrom, an der südwestlichen Berandung, der Küste Fehmarns, Einstrom.

Eine weitere Vergleichsmöglichkeit bieten die Wasserstände beider Modelle. Abb. 32 und 33 zeigen die Wasserstände des KIELMANN-Modells nach fünf Tagen Südwind,  $|T| = 1$ , und die des obigen Modells nach fünf Tagen Südwind  $|T| = 1,6$ . Die Wasserstands Differenz zwischen Rügen und dem nördlichen Bottnischen



Meerbusen beträgt im KIELMANN-Modell 39 cm, im obigen Modell 48 cm. Dabei ist zu beachten, daß mit einem größeren Windstress gerechnet wurde, in einem linearen Modell führt aber eine Erhöhung der Anregung zu einer linearen Erhöhung des Wasserstandes. Die Struktur der Isolinien, d.h. die Lage der Bereiche mit großen bzw. kleinen Wasserstandsdifferenzen ist in beiden Modellen sehr ähnlich. In Abb. 34 sind die Wasserstände entlang eines Längsschnittes durch die Ostsee, Schnitt 0, dessen Lage aus Abb. 1 zu ersehen ist, von Fehmarn bis zum nördlichen Bottnischen Meerbusen aufgetragen. Verschiebt man die Kurven parallel zueinander, da ja lediglich die Wasserstandsdifferenzen von Interesse sind, so sieht man außer im nördlichen Bottnischen Meerbusen, für den der  $\zeta$ -Schnitt des vorliegenden Modells zu glatt erscheint, eine gute Obereinstimmung.

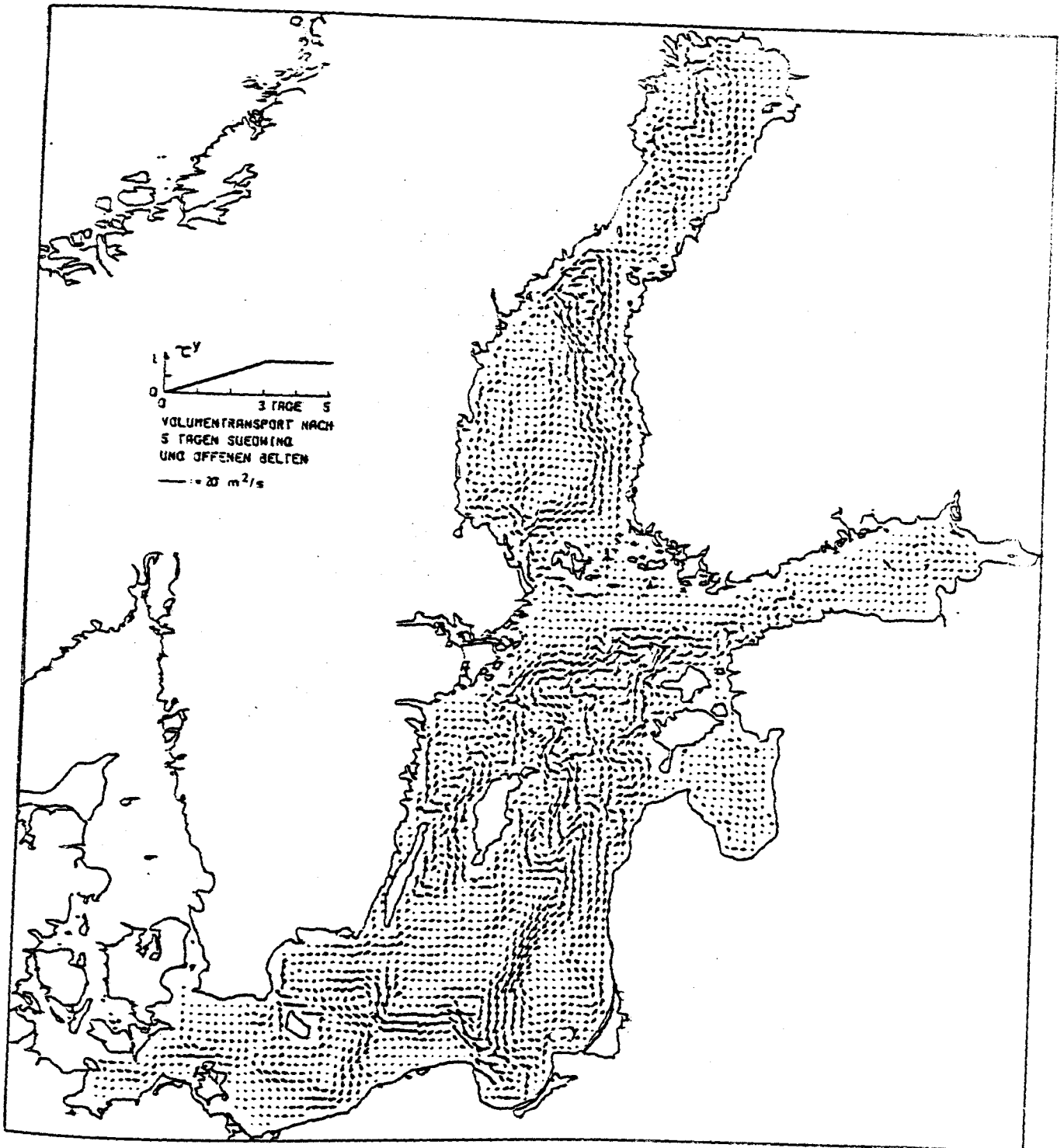


Abb. 27: Volumentransport in der Ostsee bei Südwind  
nach fünf Tagen Simulationszeit des  
Kielmann-Modelles.  
(aus KIELMANN, 1981)

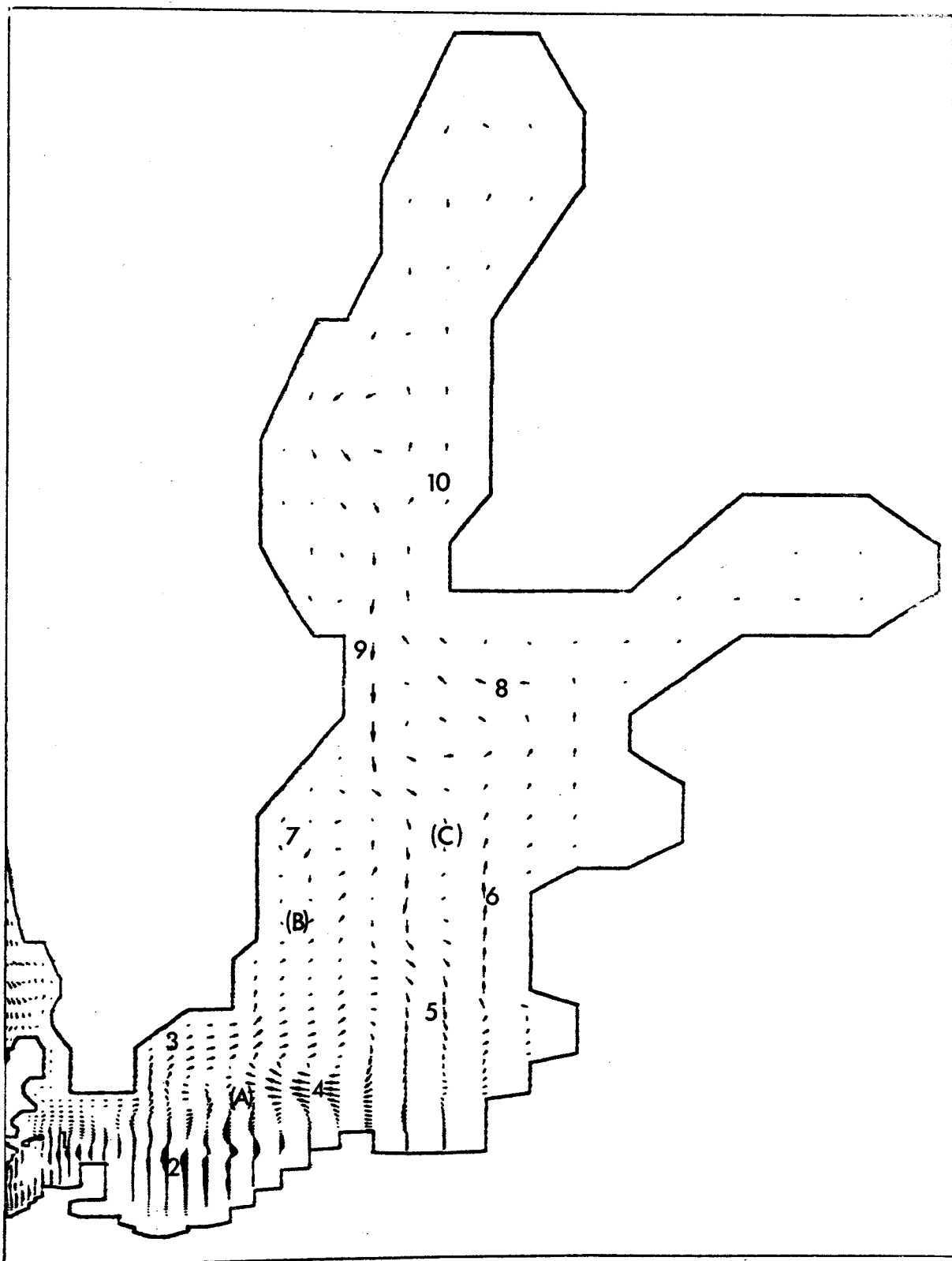


Abb. 28: Volumentransport in der Ostsee  
bei Südwind,  $|\tau| = 1.6 \text{ cgs.}$ ,  
nach 87.5 Std. Simulationszeit.  
—  $60 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-1}$

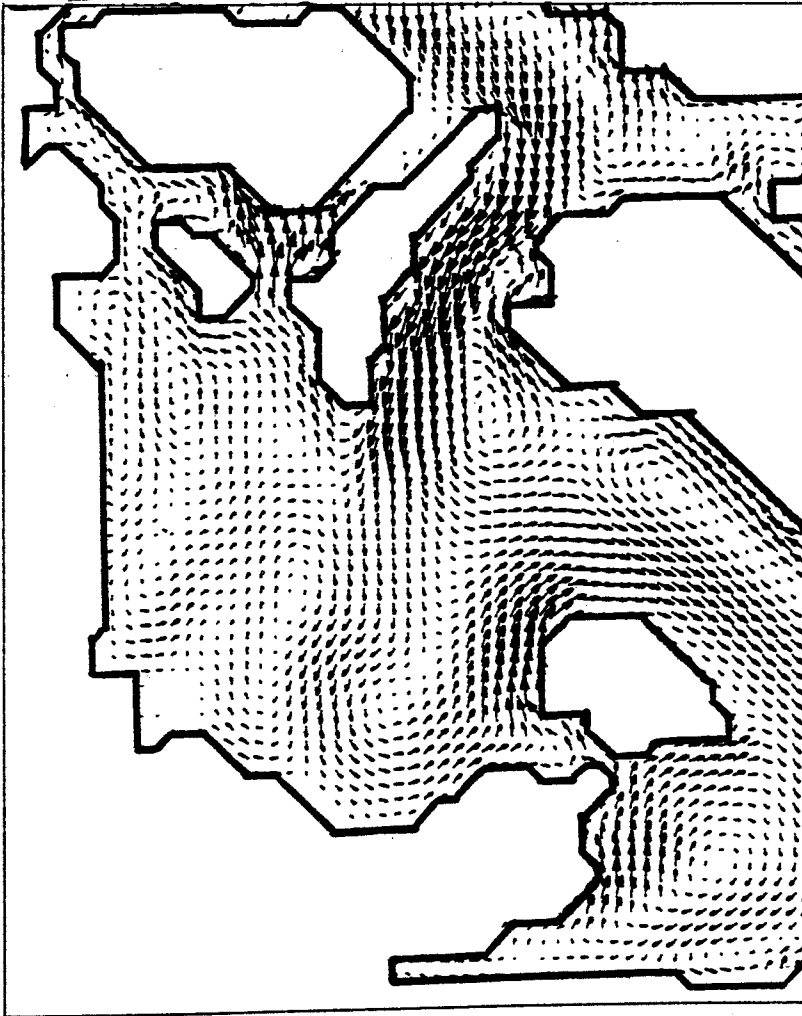


Abb. 29: Mittlere Strömung der Kieler Bucht  
bei Südwind,  $|\tau| = 1.6$  cgs.,  
nach 87.5 Std. Simulationszeit.  
→ :=  $20 \text{ cm sec}^{-1}$   
(Darstellung in transformierten Koordinaten)

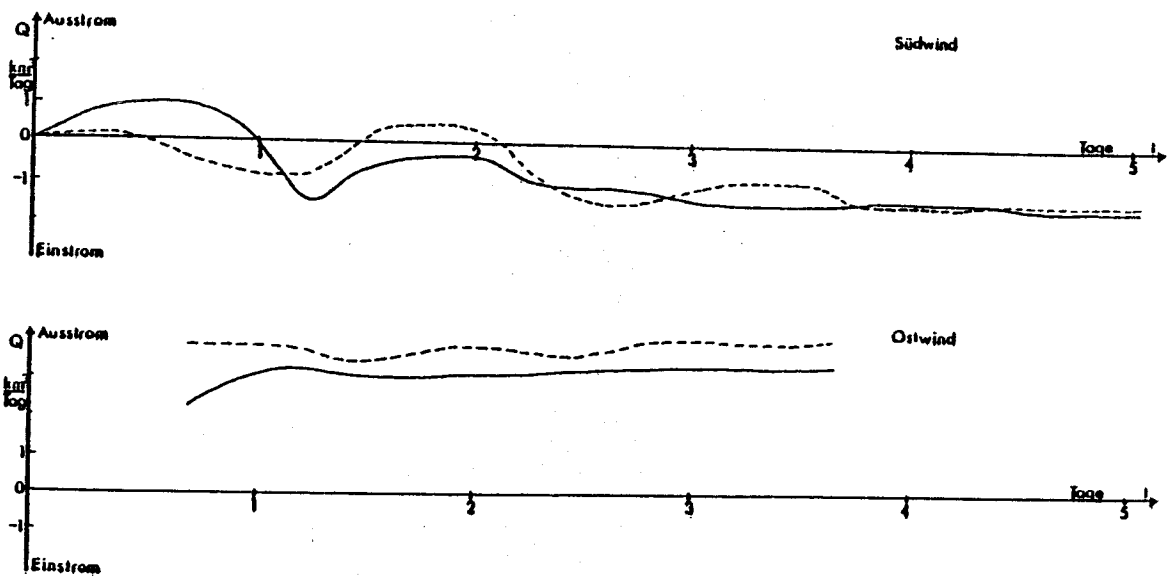


Abb. 30: Durchstrommenge  $Q$  in  $\text{km}^3/\text{Tag}$  durch den Fehmarnbelt (-----) und durch den Großen Belt (—) für Südwind und für Ostwind in Abhängigkeit der Zeit.

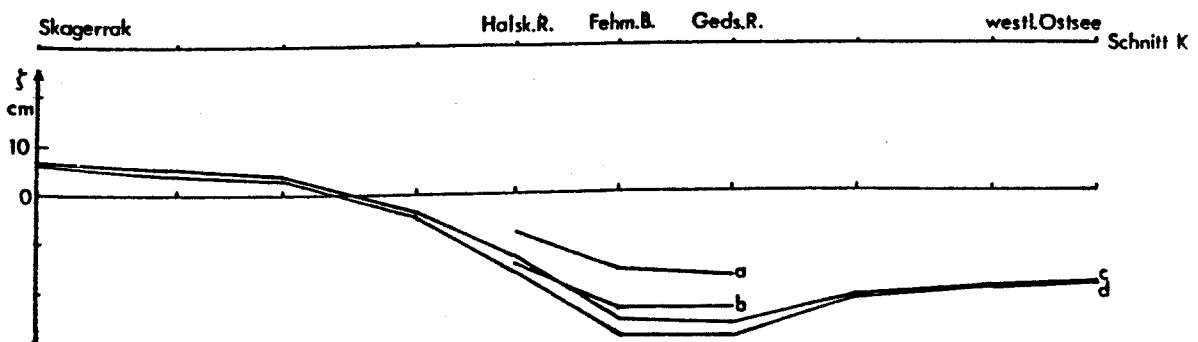


Abb. 31: Wasserstand  $\eta$  entlang eines Längsschnittes vom Skagerrak bis zur westlichen Ostsee, Schnitt K, bei Südwind,  $|\tau| = 1.6 \text{ cgs.}$ , für verschiedene Zeitpunkte der Simulation:

- a - 16.7 Std.
- b - 50 Std.
- c - 75 Std.
- d - 87.5 Std.

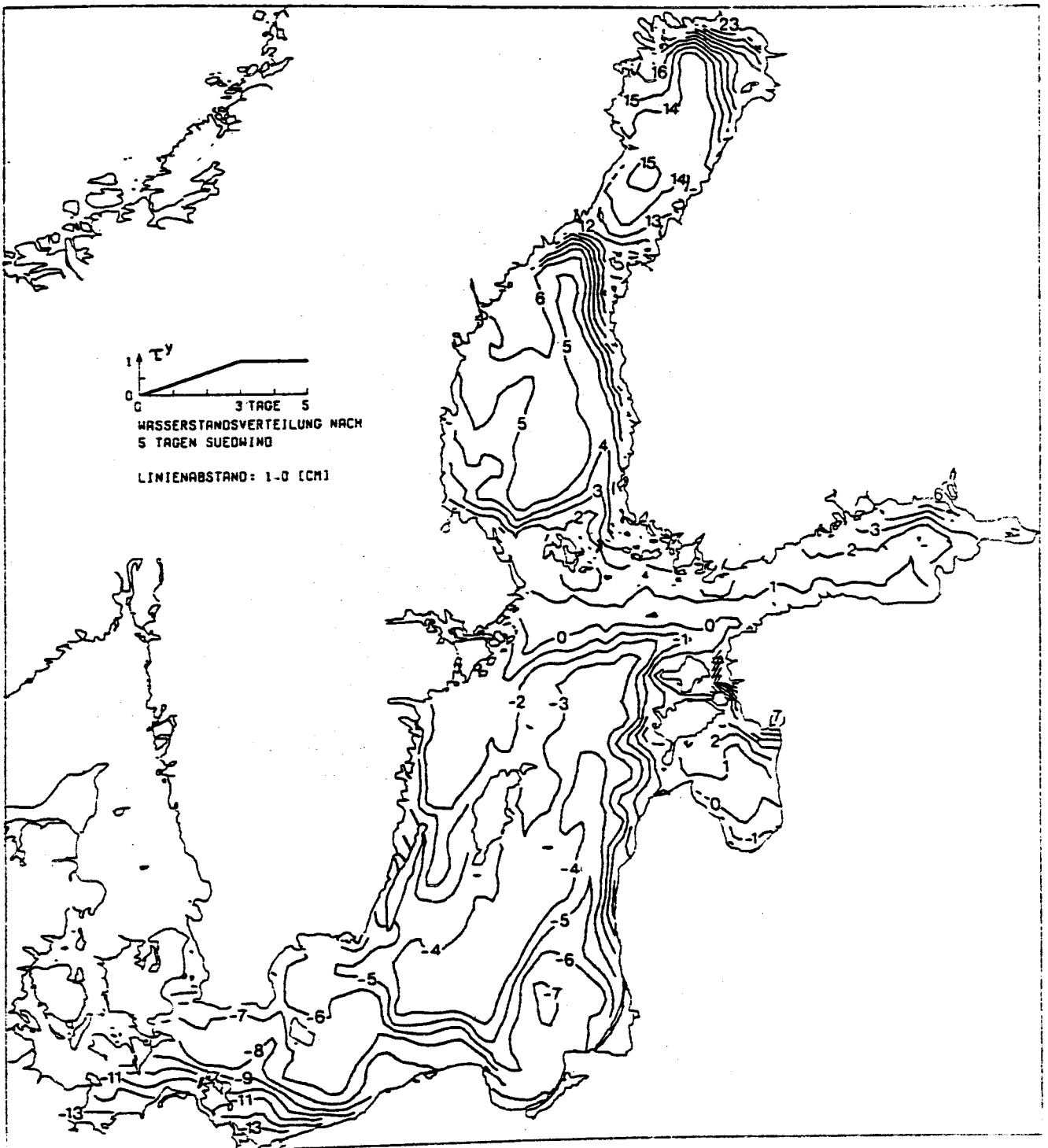


Abb. 32: Oberflächenauslenkung der Ostsee bei Südwind  
nach fünf Tagen Simulationszeit  
des Kielmann-Modelles.  
(aus KIELMANN, 1981)

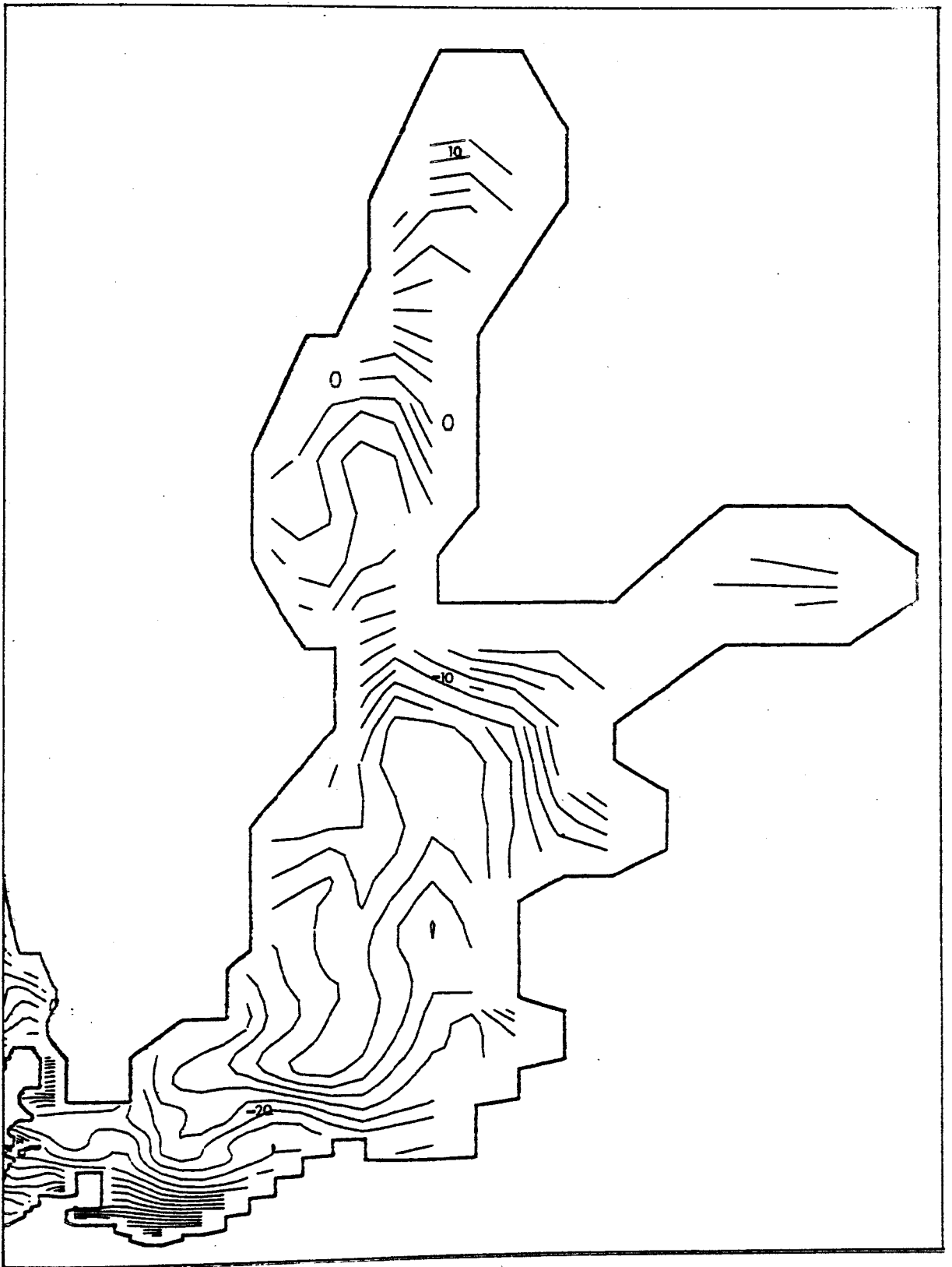


Abb. 33: Oberflächenauslenkung der Ostsee in cm  
bei Südwind,  $\tau = 1.6$  cgs.,  
nach 120 Std. Simulationszeit.

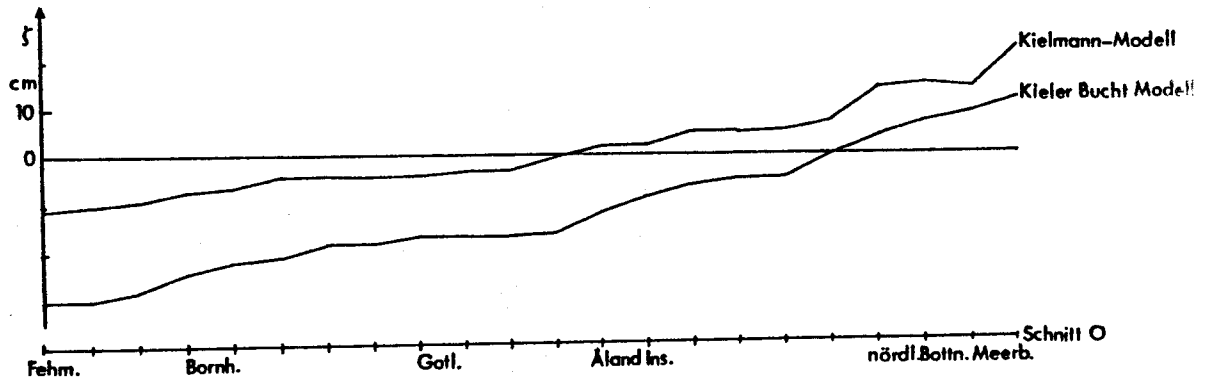


Abb. 34: Wasserstand  $\zeta$  entlang eines Längsschnittes durch die Ostsee, Schnitt O, bei Südwind,  $|\tau| = 1.6$  cgs., nach 66.7 Std. Simulationszeit für das Kielmann-Modell und für das vorliegende Kieler Bucht Modell.



#### 4.2.2. Einfluß der Topographie

Die Abbildungen 9, 15, 21, 23 und 25 in Abschnitt 4.2. zeigen mittlere Geschwindigkeiten in der Kieler Bucht bei verschiedenen Windrichtungen. Für alle betrachteten Fälle gilt:

- 1) Es existieren drei große Wirbel in der Kieler Bucht, westlich von Fehmarn, im Zentrum und zwischen der Flensburger Förde und Langeland.
- 2) Die Lage der Wirbel ist für alle Windrichtungen etwa die gleiche, benachbarte Wirbel haben jeweils entgegengesetzte Drehrichtungen.

Für die Existenz der Wirbel ist die Topographie verantwortlich. Das wird im folgenden Experiment bestätigt.

In Abb. 35 wurde innerhalb der Kieler Bucht, d.h. westlich der Verbindungslinie Fehmarn - Langeland die Tiefe konstant,  $H = 17$  m gesetzt, in den übrigen Regionen die reale Topographie belassen. Es würde Südostwind mit einem Windstress, der linear von  $|\tau| = 1,6$  auf  $|\tau| = 3,2$  cgs ansteigt, wirken lassen. Vergleicht man Abb. 35 mit Abb. 36 -der gleiche Fall mit realistischer Topographie in der Kieler Bucht- so sieht man, daß bei konstantem Boden im Gegensatz zum realistischen Boden keine Wirbel existieren. Die Strömungen verlaufen vielmehr im gesamten Gebiet ziemlich gleichförmig in Windrichtung und sind nur vom Küstenverlauf und der Corioliskraft beeinflusst.

Die Frage der Reaktion eines Beckens auf einen Windstress untersuchen BIRCHFIELD und HICKIE (1977). Sie berechnen das Strömungsverhalten in einem runden Becken mit parabolischem Boden bei räumlich konstanter Windanregung. Durch Überlagerung von topographischen Wellen entstehen 2 Wirbel mit entgegengesetzter Drehrichtung, die entgegen dem Uhrzeigersinn um das Becken wandern, und zwar bei fehlender Bodenreibung in zwei Trägheitsperioden um  $90^\circ$ . Im stationären Zustand stellen sich die Wirbel so zum Wind ein, daß ihre Achse einen Winkel zur Windrichtung einnimmt, der von der Bodenreibung abhängt.

Das tritt im vorliegenden Modell der Kieler Bucht nicht auf, hier ist die Lage der Wirbel weniger vom direkten Wind als vielmehr vom Durchstrom durch die Belte bestimmt. Vergleicht man die Fälle Ostwind und Südostwind, für die beide mittelstarker Ausstrom aus der Kieler Bucht herrscht, so sieht man, daß sich die Oberflächenströmungen unterscheiden (Abb. 24 und 26), sie sind um den gleichen Winkel von der entsprechenden Windrichtung abgelenkt, die Volumentransporte bzw. die mittleren Strömungen jedoch verhalten sich, wenn man die unterschiedliche Intensität berücksichtigt, fast identisch (Abb. 23 und 25); die Wirbel sind, im Gegensatz zum Experiment von BIRCHFIELD und HICKIE, ortsfest.

Die Drehrichtung der Wirbel ist nur von der Durchstromrichtung durch die Belte bestimmt. Vergleicht man den Ostwindfall, für den Ausstrom herrscht, mit dem entsprechenden Westwindfall mit Einstrom in die Ostsee (Abb. 23 und Abb. 15), so sieht man, daß die Wirbel bei sonst gleicher Lage entgegengesetzte Drehrichtungen haben.

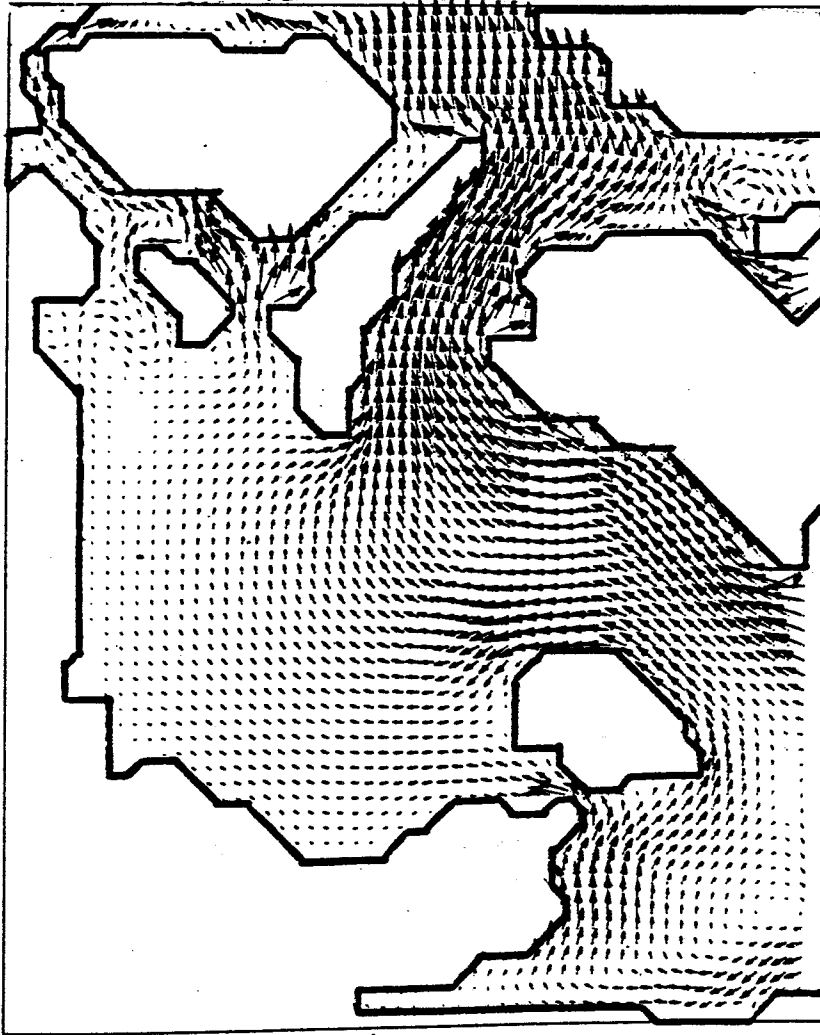


Abb. 35: Mittlere Strömung der Kieler Bucht  
bei Südostwind,  $|U| = 3.2$  ,  
nach 16.7 Std. Simulationszeit  
mit  $H = \text{const.}$  im Bereich der Kieler Bucht.  
 $\rightarrow := 20 \text{ cm sec}^{-1}$   
(Darstellung in transformierten Koordinaten)

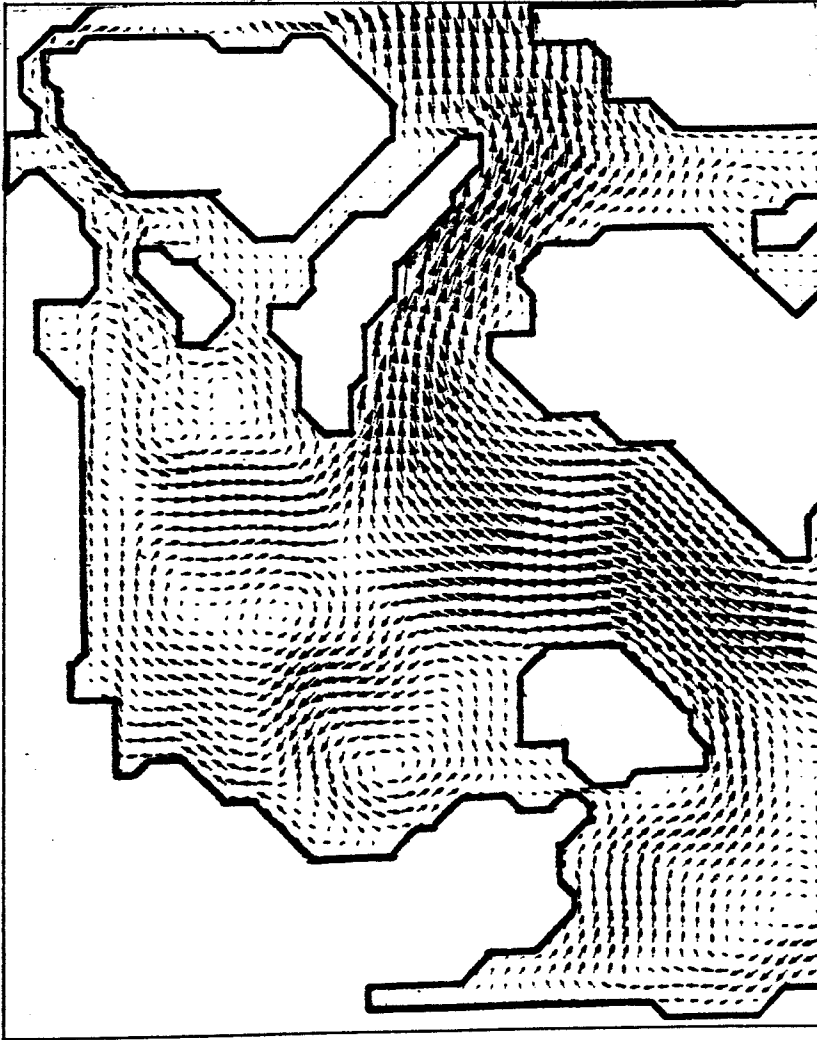


Abb. 36: Mittlere Strömung der Kieler Bucht  
bei Südostwind,  $|\tau| = 3.2$  ,  
nach 16.7 Std. Simulationszeit.  
 $\rightarrow := 20 \text{ cm sec}^{-1}$   
(Darstellung in transformierten Koordinaten)

#### 4.2.3. Einfluß der Baroklinität

In diesem Abschnitt sollen eine barokline und eine barotrope Modellierung der Kieler Bucht verglichen werden. Im barotropen Fall wurde die Dichte homogen angesetzt, doch die dreidimensionale Beschreibung durch Einführung der Schichten beibehalten, d.h. im homogenen Fall werden Auf- und Abtrieb, kinematisch bedingte Gegenströme usw. weiterhin erlaubt.

Es zeigt sich, daß nach 66,7 Std. Simulationszeit für Südwind in den über die Gesamttiefe gemittelten Geschwindigkeiten keine Unterschiede zwischen der barotropen und baroklinen Simulation bestehen. Die mittleren Geschwindigkeiten der oberen Schicht, die in Abb. 37 und 38 nach 66,7 Std. Simulationszeit dargestellt sind, sind in den tieferen Regionen südlich und nördlich von Langeland im homogenen Fall größer und etwas mehr von der Windrichtung nach rechts abgelenkt. Als Beispiel ist außerdem die dritte Schicht, 12 - 18 m dargestellt, Abb. 39 und 40. Auch hier hat der barokline Effekt einen sichtbaren, aber zu diesem Zeitpunkt noch keinen gravierenden Einfluß.

In der Realität wird der barokline Einfluß in der Kieler Bucht zumindest zeitweilig ein wichtigerer Faktor sein als im Modell. Dafür sprechen folgende Gründe:

- 1) Die mit  $s_1 = 15 \text{ ‰}$ ,  $s_2 = 20 \text{ ‰}$ ,  $s_3 = 23 \text{ ‰}$  und  $s_4 = 26 \text{ ‰}$  vorgegebene Salzschichtung wird in der sommerlichen Schichtung erheblich überschritten.
- 2) Wie in Abschnitt 4.1. beschrieben, wird von einer horizontalen Dichteschichtung als Anfangszustand ausgegangen. Wenn auch im wesentlichen ein Kattegat-Mischwasser, das keine starken horizontalen Gradienten hat, durch die Belte transportiert wird (WYRTKI, 1954), so wandert doch zwischen der Darßer Schwelle und dem Großen Belt eine Salzgehaltsfront je nach Ein- oder Ausstromlage hin und her, in deren Nähe die baroklinen Effekte wichtig sind (SIEDLER und HATJE, 1974).

Die Entwicklung der Salzgehaltsverteilung unter der Wirkung eines konstanten Südwindes zeigen die Abbildungen 41 und 42.

Der Oberflächensalzgehalt nach 66,7 Std. Simulationszeit ist in Abb. 41 dargestellt. An der schleswig-holsteinischen Küste, den Ostküsten Fehmarns, Langelands und Fünens herrscht Auftrieb, die Vertikalgeschwindigkeit beträgt bis zu  $w = 0,01 \text{ cm/sec.}$  Der Oberflächensalzgehalt ist in den Auftriebsgebieten von 15 ‰ auf bis zu 21 ‰ gestiegen.

In den Schnitten durch den Fehmarnbelt und den Großen Belt, Abb. 42, sieht man eine vertikale Durchmischung der beiden oberen Schichten, horizontale Dichteunterschiede bauen sich auf. In der Tiefe bleibt eine vertikale Dichteschichtung erhalten.

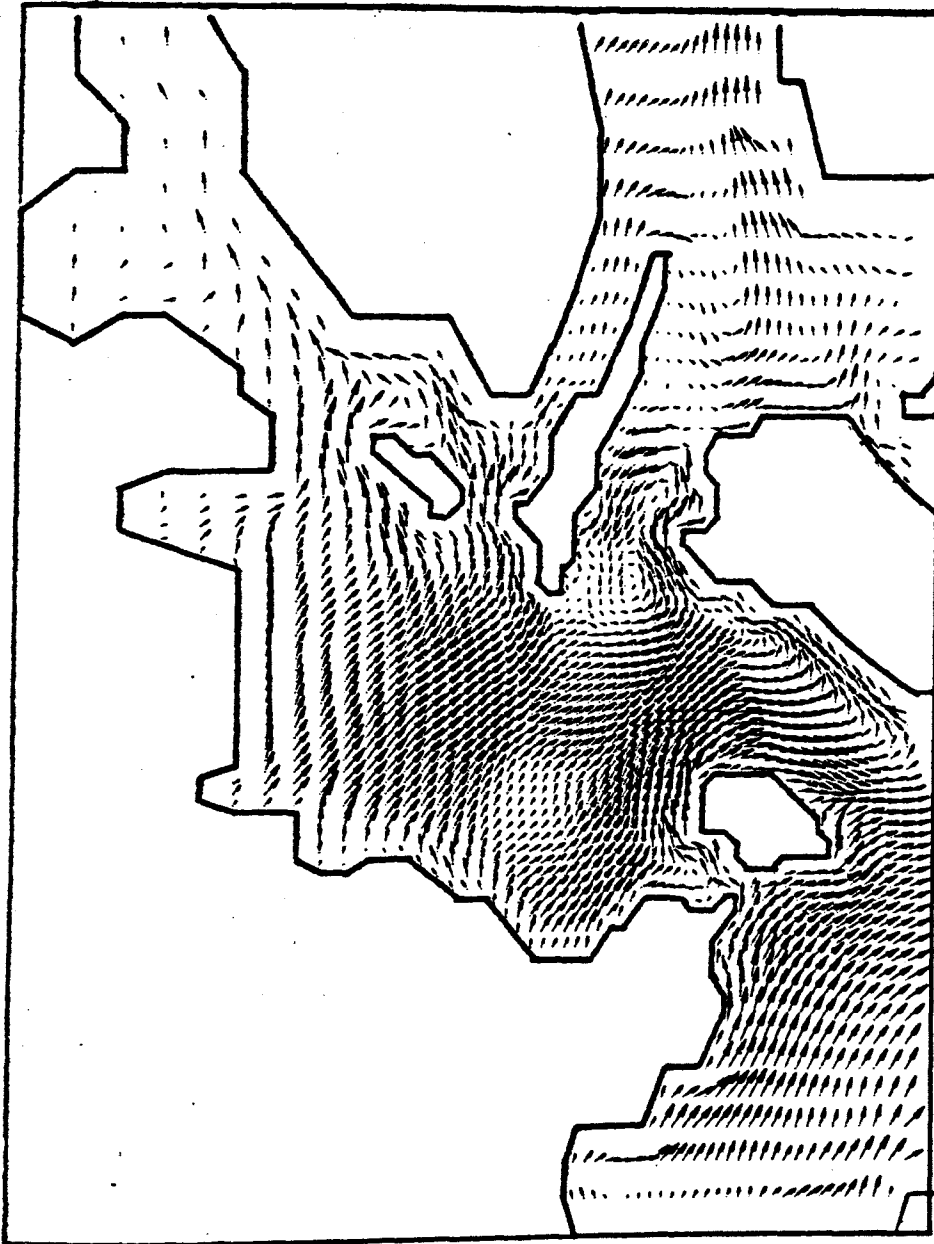


Abb. 37: Barokline Strömung der Kieler Bucht in Schicht 1  
(0-6 m) bei Südwind,  $|Z|=1.6$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.  
→  $:= 20 \text{ cm sec}^{-1}$

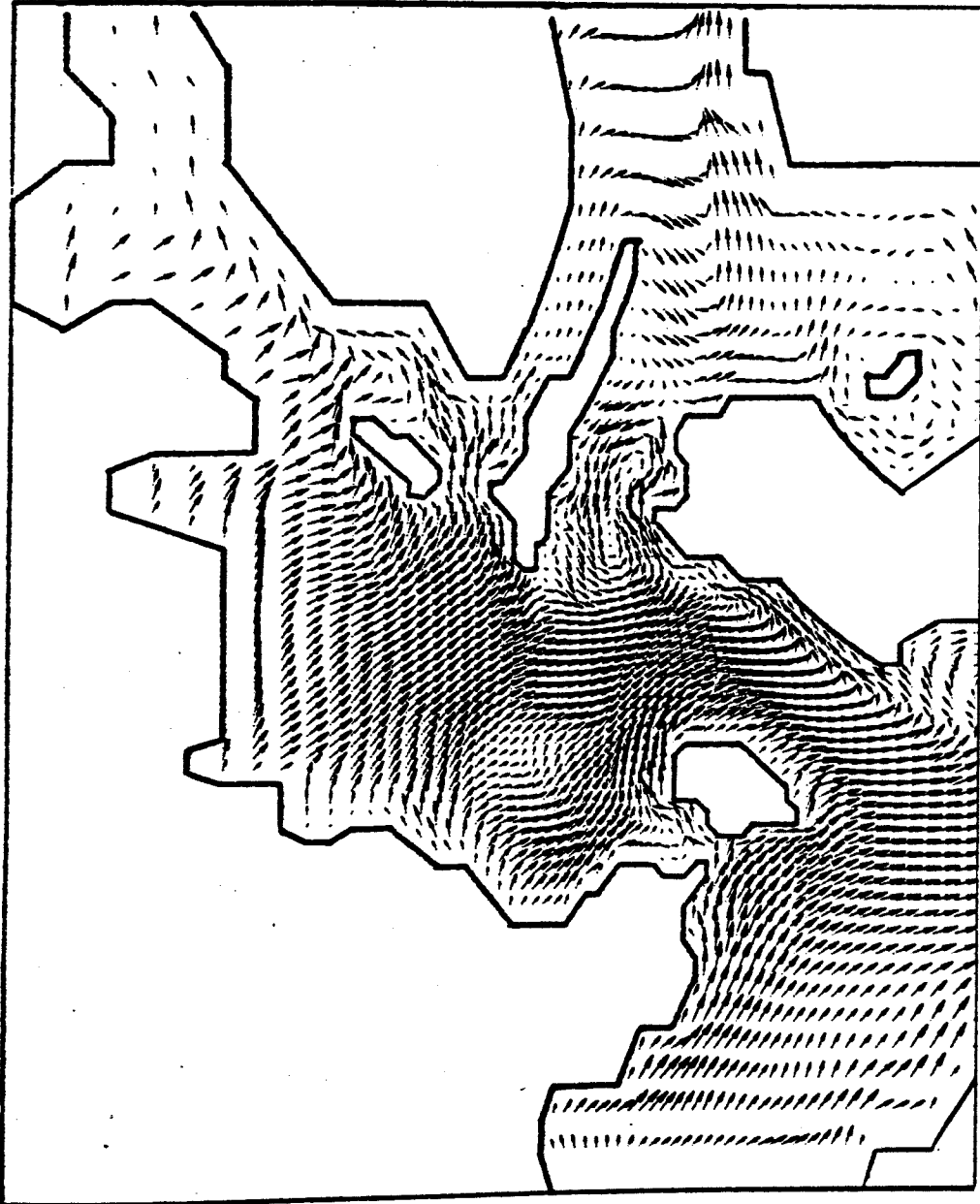


Abb. 38: wie Abb.37, nur im homogenen Medium



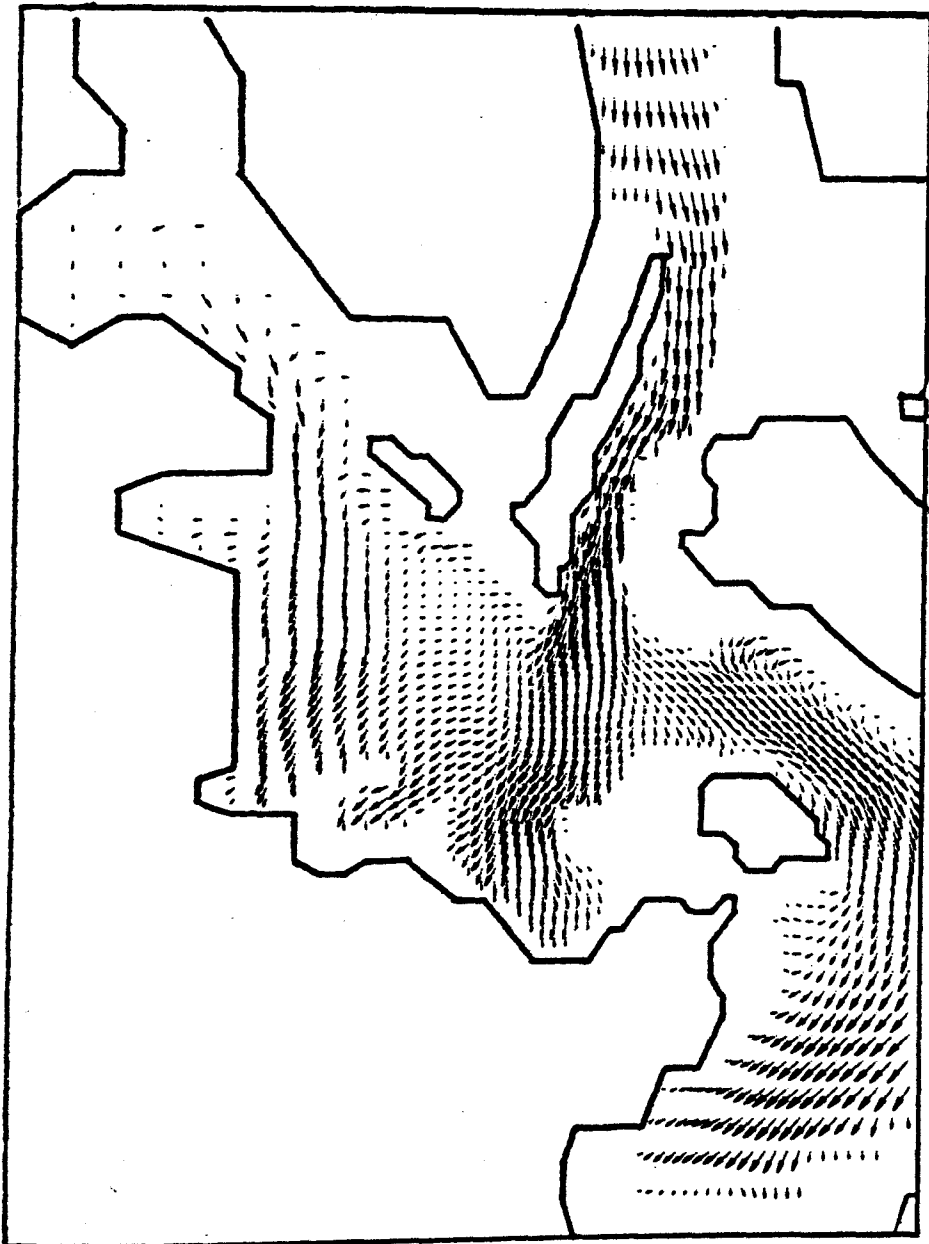


Abb. 39: Barokline Strömung der Kieler Bucht in Schicht 3  
(12 -18 m) bei Südwind,  $|\pi|=1.6$  cgs. ,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.  
→  $:=20 \text{ cm sec}^{-1}$

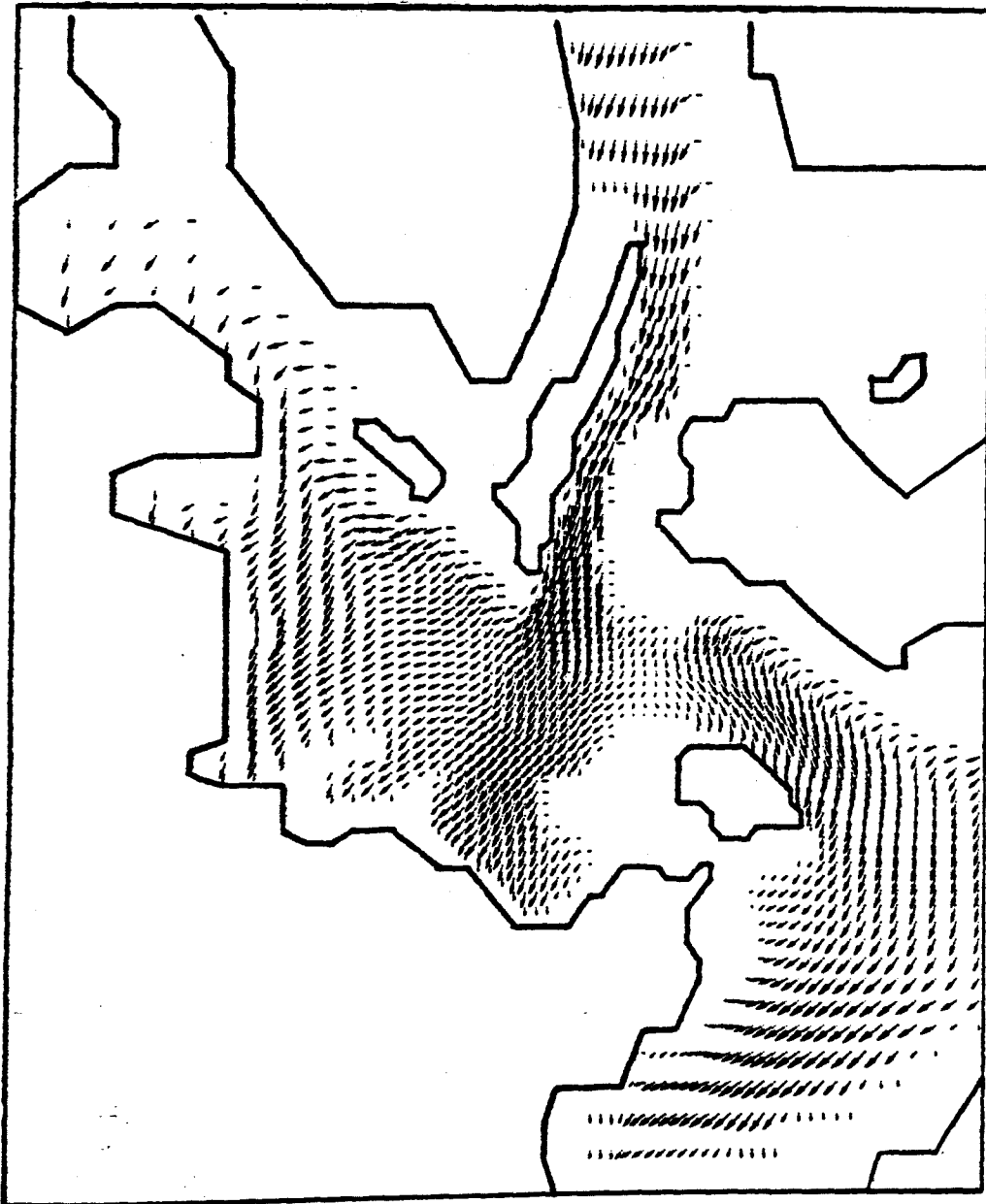


Abb. 40: wie Abb.39, nur im homogenen Medium

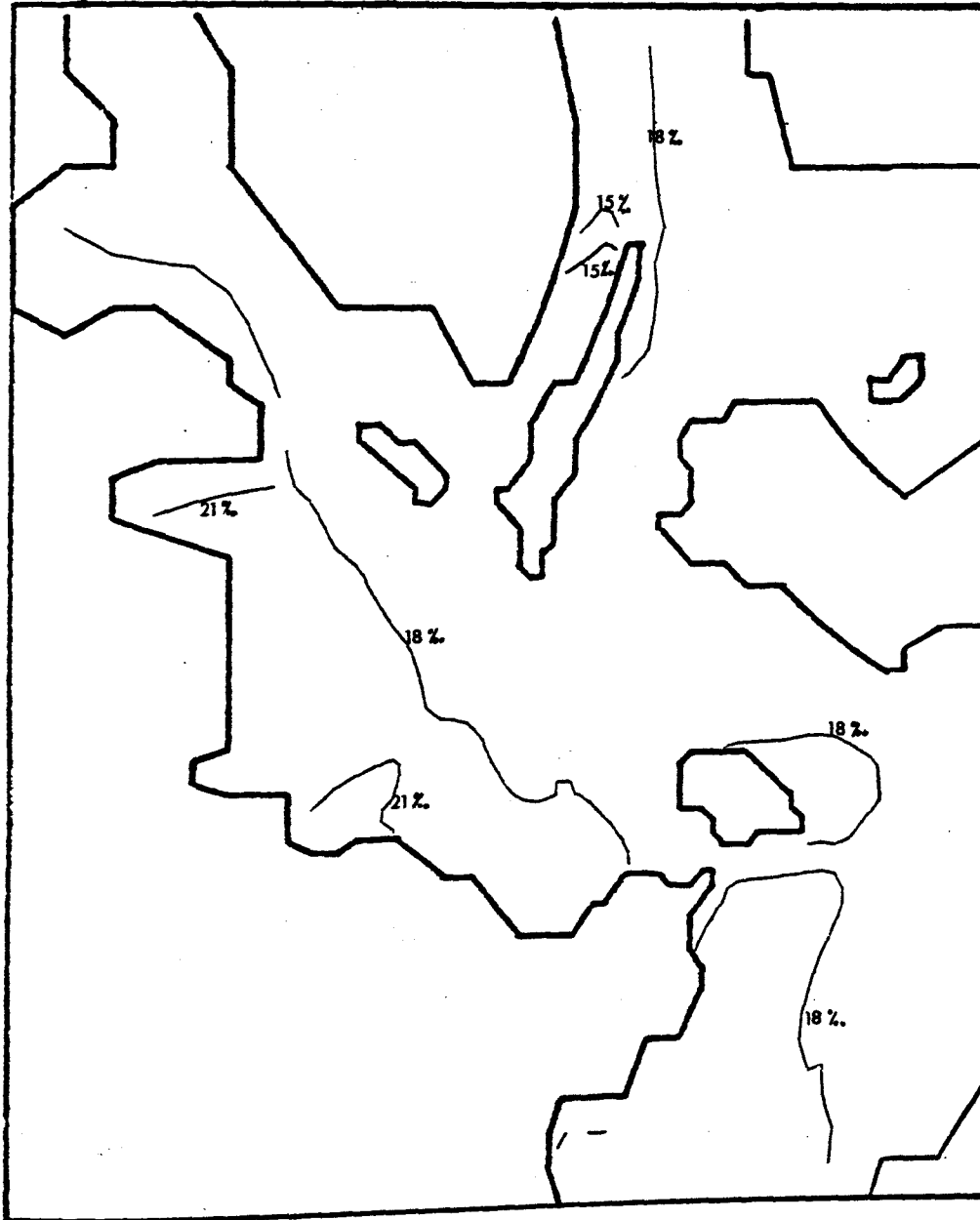


Abb. 41: Salzgehalt in der Kieler Bucht in Schicht 1  
(0-6 m) bei Südwind,  $\sigma_t = 1.6$  cgs.,  
nach 66.7 Std. Simulationszeit.

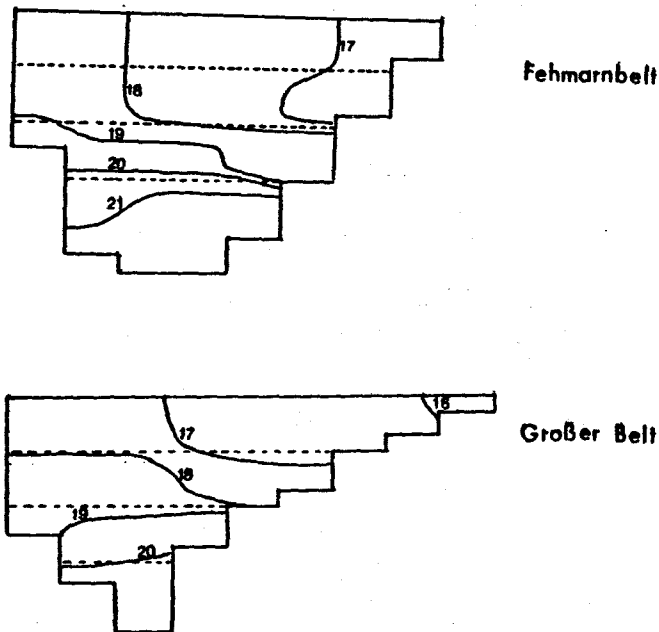


Abb. 42: Salzgehaltsschnitte in ‰ durch den Fehmarnbelt und durch den Großen Belt bei Südwind,  $|Z|=1.6$  cgs., nach 66.7 Std. Simulationszeit.

Die ausgezogenen Linien stellen die Isohalinen dar, die gestrichelten die Grenzflächen der Schichten.

#### 4.2.4. Vergleich von Ergebnissen des numerischen Modells für idealisierte Windfelder mit empirisch gewonnenen Zusammenhängen zwischen Wind und Strom

In Abschnitt 4.2. sind für idealisierte Windfelder typische Strömungsbilder dargestellt. Hier soll der Versuch gemacht werden, die "Wirklichkeitsbezogenheit" der Modellergebnisse zu untersuchen. Ein direkter Vergleich mit Messungen scheidet aus, weil in der Natur weder räumlich und zeitlich konstante Windfelder noch ein Anfangszustand der Ruhe und horizontale Dichteschichtung im gesamten Gebiet vorkommen.

Statistische Aussagen über das Verhalten der Kieler Bucht sind in der Literatur nicht, oder nur grob qualitativ gemacht worden;

für die Belte existieren mehr Untersuchungen. G. DIETRICH hat Strommessungen über ein Jahr an den Beltsee-Feuerschiffen statistisch ausgewertet (DIETRICH, 1951). Es soll versucht werden, seine Ergebnisse mit den Modellergebnissen unter Berücksichtigung ihrer physikalischen Verschiedenheit zu vergleichen.

Dazu seien im folgenden das zugrunde liegende Datenmaterial und DIETRICH's Bearbeitung beschrieben:

DIETRICH benutzt Oberflächenstrombeobachtungen des Jahres 1937 an den Feuerschiffen. Er nimmt Tagesmittelwerte, um kurzperiodische Stromschwankungen zu eliminieren und geht davon aus, daß Tagesmittelwerte den quasistationären Zustand beschreiben, da die Einstellzeit der windbedingten Oberflächenströmung einen Tag nicht überschreitet. Den Wind berechnet er aus dem Luftdruckgefälle Fehmarn - Skagen und Esbjerg - Kopenhagen, da das großräumige meteorologische Feld für die Strömungen der Beltregion bestimmend ist.

Der Zusammenhang zwischen Windrichtung und Stromrichtung wird für fünf verschiedene Windgeschwindigkeiten für jedes Feuerschiff graphisch ermittelt. Der Zusammenhang zwischen Stromgeschwindigkeit und Windrichtung wird ebenfalls graphisch ermittelt, und zwar einzeln für 12 Sektoren der Windrichtung, wobei sich die Sektoren nach beiden Seiten um  $20^{\circ}$  überlappen. Durch die Punkteschar wird graphisch eine Kurve gelegt. Die so gewonnenen Strömungsgeschwindigkeiten und -beträge in Abhängigkeit vom Wind werden in den sogenannten "Gefällsrosen" dargestellt, ein Beispiel zeigt Abb. 43 für das Feuerschiff Fehmarnbelt.

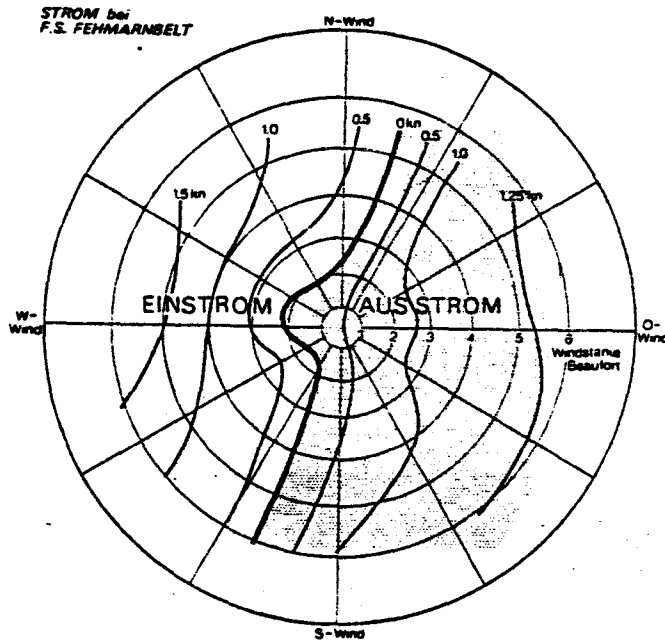


Abb. 43: Beziehung zwischen den Tagesmittelwerten von Wind und Oberflächenströmung bei Feuerschiff Fehmarnbelt. Windstärke auf den Kreisen in Beaufort, Stromstärke in Knoten. (nach DIETRICH, 1951)

Um die Modellergebnisse mit den Ergebnissen DIETRICH's vergleichen zu können, ist folgendes zu beachten.

- 1) Bei DIETRICH wurden Oberflächenströmungen gemessen, im Modell bestehen die Oberflächendaten aus der vertikalen Mittelung über eine obere Schicht von 6 m. Um zu vergleichbaren Geschwindigkeiten zu kommen, wird von einer Geschwindigkeitsabnahme mit der Tiefe nach der Ekman'schen Triftstromtheorie ausgegangen. Danach nimmt die Geschwindigkeit innerhalb der Ekmannschicht exponentiell ab:

$$u(z) = u(0) \cdot (\cos \sqrt{f} z - \sin \sqrt{f} z) \cdot e^{-\sqrt{f} z} \quad \text{mit} \quad \sqrt{f} = \sqrt{\frac{g \cdot f}{2 A_v}}$$

$z$  = Tiefe

mit  $f = 0,11953 \cdot 10^{-3}$

$A_v = 30$

$\bar{g} = 1$

$$\Rightarrow \bar{u}(0-600 \text{ cm}) = u(0) \cdot 0,67$$

Für den Vergleich der Strömungsgeschwindigkeiten werden deshalb die von DIETRICH angegebenen Werte mit dem Faktor 0,67 multipliziert.

- 2) Da in der Ostsee Niederschlag und Süßwasserzufuhr gegenüber der Verdunstung überwiegen, muß im Mittel für Windstille Ausstrom aus der Ostsee herrschen, vgl. Abb. 43. Im vorliegenden Modell sind Niederschlag, Verdunstung und Süßwasserzufuhr jedoch vernachlässigt. Für wenige Tage Simulationszeit ist es auch gerechtfertigt, nur ist zu beachten, daß das Modell abweichend von dem DIETRICH'schen Ergebnis keinen Nettoausstrom aus der Ostsee produzieren kann.
- 3) Der gravierendste Unterschied besteht in der unterschiedlichen Gewinnung der Geschwindigkeitsdaten. Im Modell wird unter einem typischen Strömungsbild für ein idealisiertes Windfeld der quasistationäre Zustand für einen räumlich und zeitlich konstanten Wind verstanden. Inwieweit die in Abb. 9 - 26 dargestellten Strömungen quasistationär sind, ist im einzelnen noch zu klären. DIETRICH geht davon aus, daß durch eine eintägige Mittelung der gemessenen Strömungswerte der quasistationäre Zustand beschrieben sei. Bei schnell fluktuierenden Windfeldern oder fluktuierenden Strömungen erscheint diese Annahme jedoch problematisch.
- 4) In der Modellsimulierung wird jeweils eine konstante Windrichtung untersucht, DIETRICH benutzt, um eine genügende Datendichte zu erhalten, für eine Windrichtung jeweils einen Sektor von  $55^{\circ}$ .
- 5) Schließlich sei auf die erheblichen Fehlerquellen bei der Gewinnung und Umrechnung der Vergleichsdaten hingewiesen. DIETRICH nimmt gemessene Luftdruckdaten und berechnet daraus den analogen Wind, den er in Einheiten Windstärke Beaufort angibt. Zum Vergleich mit den Modelldaten wird aus der Windstärke der Windstress  $\tau$  berechnet nach der Formel

$\tau = c_D \cdot g_L \cdot u_w^2$ , diese Parameterisierung enthält ebenfalls eine große Unsicherheit, die Wahl des Koeffizienten  $c_D$  variiert in der Literatur um über 50 %.

Für vier Feuerschiffe, Halskov Rev, Fehmarnbelt, Gedser Rev und Kiel werden die Modelldaten mit den empirisch von DIETRICH ermittelten verglichen, siehe Tabelle 1.

Wind- richtg. Station	N		O		S		W		SW		SO	
	Strömung: Betr. Richt.		Strömung: Betr. Richt.		Strömung: Betr. Richt.		Strömung: Betr. Richt.		Strömung: Betr. Richt.		Strömung: Betr. Richt.	
Halskov Rev	-54%	✓	-26%	✓	-72%	✓	-55%	✓	-76%	✓	+34%	✓
Fehm. belt	↗		-10%	✓		↗	+ 2%	✓	-51%	✓	+17%	✓
Gedser Rev	↗		-17%	✓		↗	+ 2%	✓	-46%	✓	-25%	✓
FS Kiel	-11%	✓	- 1%	✓	+82%	✓	+48%	✓	+32%	✓	+59%	✓

Tabelle 1: Abweichung der Modelldaten von den von DIETRICH empirisch ermittelten Daten.

✓ : Strömungsrichtung stimmt überein

↗ : Strömungsrichtung stimmt nicht überein

a) Abweichungen in der Strömungsrichtung:

Abweichungen existieren bei Nord- und bei Südwind für die Feuerschiffe Fehmarnbelt und Gedser Rev. Anhand der vorliegenden statistischen Angaben soll geprüft werden, wie gesichert DIETRICH's Aussagen für die einzelnen Windrichtungen sind. Tabelle 2 zeigt die prozentuale Obereinstimmung der gemessenen Strömungsrichtungen mit den in der "Gefällsrose" angegebenen Werten. Für Nord- und Südwind sowie für geringe Windstärken bei Westwind ist die Obereinstimmung ziemlich gering. Für die Stationen Fehmarnbelt und Gedser Rev bei Nord- und bei Südwind, für die die Strömungsrichtung der Modellergebnisse nicht mit den bei DIETRICH angegebenen übereinstimmt, beträgt sie nur zwischen 50 und 69 %. Für eine einjährige Meßreihe von Tagesmittelwerten ist die



Datendichte für Nord- und Südwinde ohnehin sehr gering. In Tabelle 3 sind die Jahresmittel der relativen Häufigkeiten der Windrichtung aus 30jährigen Messungen des Deutschen Wetterdienstes für die Stationen Fehmarnbelt und FS Kiel angegeben (EHRHARDT, 1978).

Nördliche und südliche Winde kommen demnach in nur 7,1 % bzw. 11 % der Gesamtrichtungsverteilung vor. Wenn von DIETRICH's einjährigen Tagesmittelwerten nur ca. 10 % auf Nord- bzw. Südwinde fallen, von denen auch noch 31 % - 50 % von den Gefällsrosendaten abweichende Strömungsrichtungen anzeigen, so ist seine statistische Aussage über nördliche und südliche Winde speziell an den Stationen Fehmarnbelt, Gedser Rev und FS Kiel nicht sehr gefestigt.

Wind- richt./ Windstärke Station	N		O		S		W	
	3 Bft.	6 Bft.	3 Bft.	6 Bft.	3 Bft.	6 Bft.	3 Bft.	6 Bft.
Halskov Rev	62 %	86 %	87 %	100 %	70 %	80 %	80 %	89 %
Fehm.belt	50 %	63 %	93 %	97 %	61 %	63 %	40 %	89 %
Gedser Rev	62 %	62 %	72 %	92 %	54 %	69 %	52 %	88 %
FS Kiel	47 %	56 %	83 %	85 %	42 %	87 %	44 %	63 %

Tabelle 2: Prozentuale Obereinstimmung der gemessenen Strömungsrichtungen mit den von DIETRICH in der "Gefällsrose" angegebenen Werten für 3 Beaufort und 6 Beaufort (aus DIETRICH, 1951: Oberflächenströmungen im Kattegat, im Sund und in der Beltsee)

Windrichtung	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Station								
Fehm.belt	7,1	6,6	13,7	11,9	11,0	15,8	22,0	1,1
FS Kiel	6,3	6,4	15,0	10,6	10,9	18,3	20,9	9,8

Tabelle 3: Jahresmittel der relativen Häufigkeit der Windrichtungen in % (aus EHRHARDT, 1978:  
Das Klima der Kieler Bucht)

Im folgenden sollen mögliche Gründe für die gegenüber Ost- und Westwind relativ schlechte statistische Absicherung der Aussagen von DIETRICH über Nord- und Südwindlagen angegeben werden. Die geringe Datendichte kann nicht die alleinige Ursache darstellen. Im Modell, wie auch in der empirischen Auswertung von DIETRICH wird angenommen, daß der quasistationäre Zustand erreicht sei; diese Annahme soll überprüft werden. In Abb. 30 sind die im Modell simulierten Durchstrommengen durch die Schnitte 1 und 2 im Fehmarnbelt und Großen Belt, wie sie in Abb. 2 eingezeichnet sind, für Ost- und Südwind in Abhängigkeit der Simulationszeit aufgetragen. Während für Ostwind für den ganzen Simulationszeitraum an beiden Schnitten Ausstrom herrscht, der nach ca. einem Tag konstant bleibt, wechseln für Südwind ca. 2 1/2 Tage Ein- und Ausstrom ab, nach 3 Tagen scheint sich auch hier ein Gleichgewicht bei schwachem Einstrom einzustellen. Verdeutlicht wird die starke Stromschwankung in den Belten bei Südwind auch in Abb. 44 und 45. Hier sind für die Stationen Halskov Rev, Fehmarnbelt und Gedser Rev die Strömungsvektoren zu verschiedenen Zeitpunkten aufgetragen. Der gestrichelte Pfeil stellt die von DIETRICH aus eintägigen Mittelungen erhaltene Strömung dar. Für Ostwind ist die Richtung von Anfang an konstant, die Strömungsgeschwindigkeit ändert sich nach 42 Std. nicht mehr, zwischen 17 und 42 Std. auch nur geringfügig. Anders sieht es bei Südwind aus, hier kann man zumindest für Fehmarnbelt

und Gedser Rev erst für Simulationszeiten größer als drei Tage von einer Konstanz des Geschwindigkeitsvektors sprechen.

Wenn die wichtige Voraussetzung der Quasistationarität für Südwind aber nicht erfüllt ist, sind die Werte von DIETRICH und die des Modells nicht vergleichbar.

Erfahrungsgemäß haben südliche und nördliche Winde in der Kieler Bucht nur eine geringe Richtungsbeständigkeit, so daß der quasistationäre Zustand, wie er in Abb. 9 - 14 für eine Wirkdauer von 87,3 Std. dargestellt ist, kaum erreicht wird.

In der obigen Betrachtung wurden nur Süd- und Ostwinde erläutert, Nord- und Westwinde verhalten sich vergleichbar.

b) Abweichungen im Geschwindigkeitsbetrag.

Nimmt man Nord- und Südwinde aus der Betrachtung heraus, so sind für Südwest- und Westwinde die Abweichungen im Geschwindigkeitsbetrag am größten. Auffällig ist die große Abweichung am Feuerschiff Halskov Rev. Zwar beträgt die durchschnittliche Abweichung der gemessenen Geschwindigkeitsbeträge vom Durchschnittsgeschwindigkeitsbetrag, wie Tab. 4 zeigt, für Halskov Rev und Westwind immerhin 83 %, doch liegt das im Mittel aller Stationen für Ost- und Westwind. Die Ursachen für die relativ große Abweichung des Geschwindigkeitsbetrages am Feuerschiff Halskov Rev sind aus dem vorliegenden Material nicht erklärbar. Eine mögliche Ursache ist eine durch Glättung oder mangelnde Auflösung falsche Bodentopographie an gerade diesem Gitterpunkt.

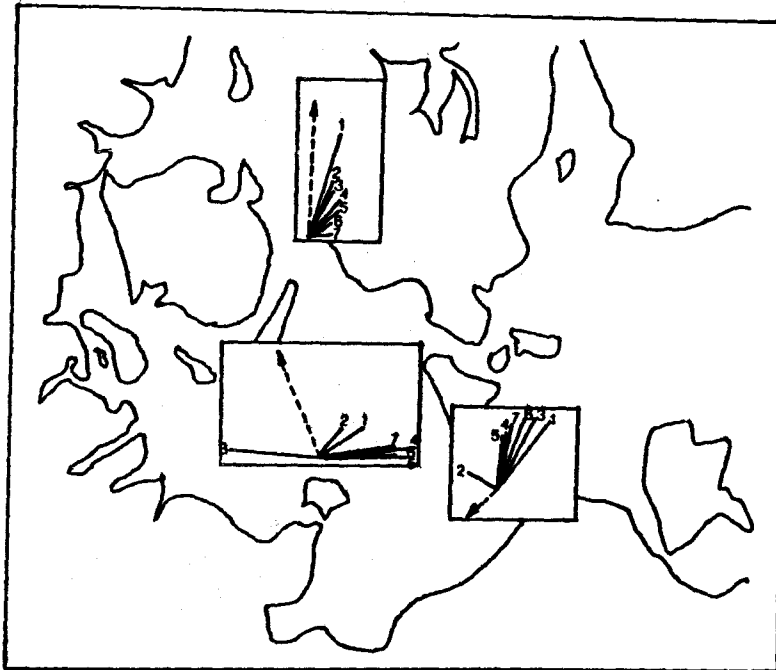


Abb. 44: Oberflächenströmungen an den Feuerschiffen Halskov Rev, Fehmarnbelt und Gedser Rev bei Südwind zu verschiedenen Simulationszeitpunkten:  
 (1) - 17 Std., (2) - 42 Std., (3) - 67 Std., (4) - 75 Std.  
 (5) - 87 Std., (6) - 104 Std., (7) - 120 Std.,  
 gestrichelter Pfeil: Strömung bei DIETRICH.

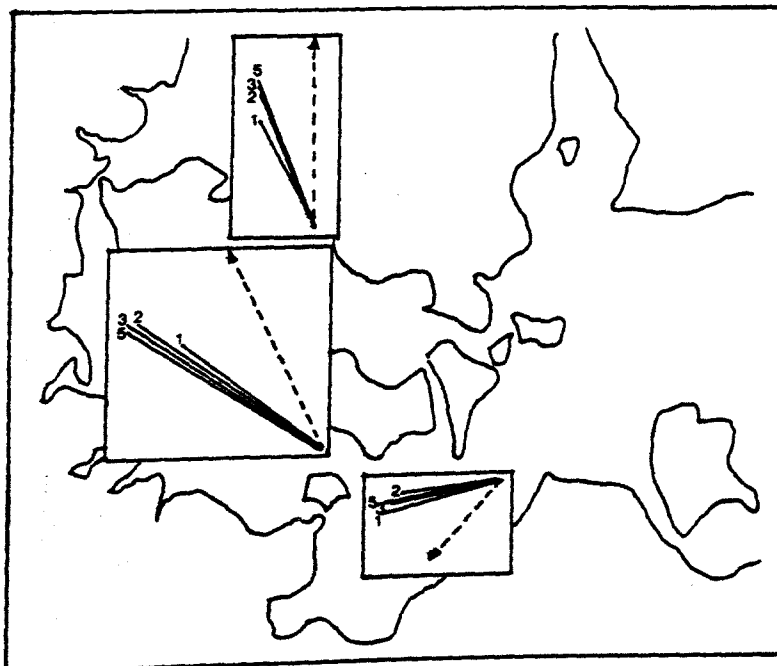


Abb. 45: wie Abb. 44, nur für Ostwind

Wind- richtung	N		O		S		W	
Station	3 Bft.	6 Bft.	3 Bft.	6 Bft.	3 Bft.	6 Bft.	3 Bft.	6 Bft.
Halskov Rev	300	120	50	30	120	60	83	24
Fehm.belt	600	100	40	30	150	60	125	28
Gedser Rev	300	150	75	43	400	100	200	36
FS Kiel	100	50	50	30	150	50	75	38

Tabelle 4: Durchschnittliche Abweichung der gemessenen Geschwindigkeitsbeträge vom Durchschnittsgeschwindigkeitsbetrag in %.

(aus DIETRICH, 1951: Oberflächenströmungen im Kattegat, im Sund und in der Beltsee)

#### 4.2.5. Untersuchung über Durchstrommengen durch den Großen Belt

Für den Zeitraum April 1975 bis Mai 1975 während BALTIC '75 liegen umfangreiche Meßreihen für Wind, Wasserstände und z.T. Strömungen vor (KIELMANN et al., 1976). Zum Teil zeitlich überlappend lief das Dänische Beltprojekt, in dem ebenfalls umfangreiches Datenmaterial gewonnen wurde (JACOBSEN, 1976; JACOBSEN, 1980).

Das vorliegende Modell wurde für 10 Tage Realzeit gerechnet, als Windanregung wurde der nordöstlich von Bornholm gemessene Wind während BALTIC '75 benutzt. Er wurde von J. KIELMANN aus vier Stationen gemittelt und auf Stundenwerte interpoliert. Dieser Wind wurde für das Modell auf 750 sec. interpoliert und im gesamten Berechnungsgebiet räumlich konstant vorgegeben. Die räumliche Konstanz ist zwar unrealistisch, doch wies LANGE nach, daß die Strömung im Fehmarnbelt am stärksten korreliert ist mit dem Wind in der westlichen Ostsee (LANGE, 1975). Es wurde versucht, einen Zeitraum mit wenig räumlicher Variabilität im Windfeld zu wählen. Abb. 46 zeigt die Luftdruckverteilung für den 5.5.1975,

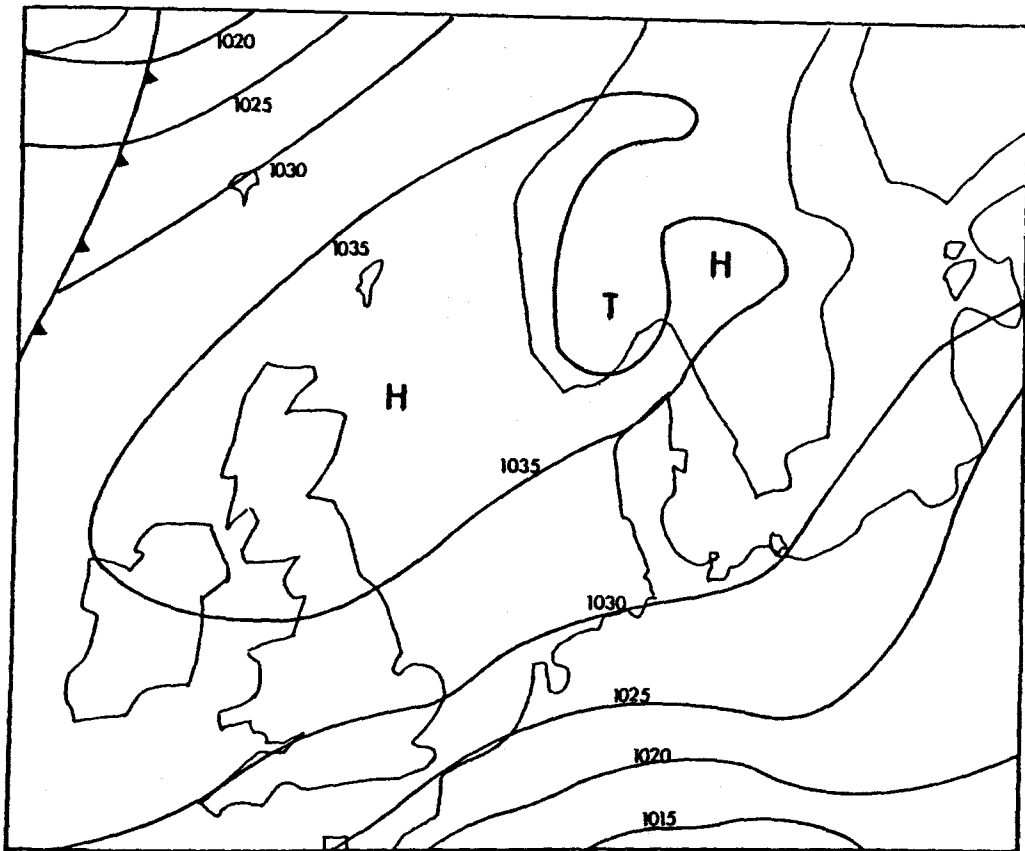


Abb. 46: Wetterkarte vom 5. Mai 1975 (DWD)

simuliert wurde der Zeitraum 30. April bis 10. Mai 1975, Windrichtung und -betrag sind in Abb. 47 dargestellt. Im Rahmen des Dänischen Beltprojektes wurde zur gleichen Zeit an drei Stationen im nördlichen Großen Belt mit je zwei Strömungsmessern in 7 und 15 m Tiefe die Horizontalgeschwindigkeit gemessen und daraus der Durchstrom berechnet. Der gemessene und der vom Modell berechnete Durchstrom sind in Abb. 48 dargestellt. Der Vergleich zeigt einen ähnlichen Verlauf der Kurven, doch ist die Amplitude der berechneten Kurve um ca. einen Faktor 2 kleiner als die der Meßkurve. Hier wurde mit einem Schubspannungskoeffizienten von  $c_D = 2,1 \cdot 10^{-3}$  gerechnet. Der Durch-

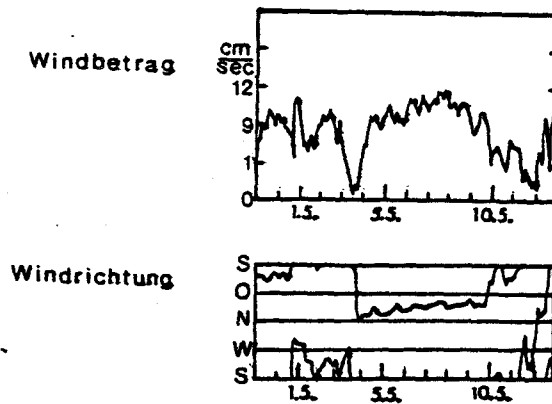


Abb. 47: Windbetrag und -richtung im zentralen Bornholmbecken für Mai 1975.  
(aus KIELMANN, 1981)

strom hängt empfindlich von  $c_D$  ab, doch die Wahl eines größeren Schubspannungskoeffizienten scheint nicht angebracht, da der simulierte Wasserstand z.B. bei Marienleuchte ohnehin schon größer als der gemessene Wasserstand ist, Abb. 49 zeigt den gemessenen und berechneten Wasserstand bei Marienleuchte für den Simulationszeitraum.

Ob die Diskrepanz in der Amplitude der Durchstrommenge nur von der räumlichen Konstanz des vorgegebenen Windes abhängt, oder evtl. durch die numerische Simulation oder einer zu sehr geglätteten Bodentopographie bedingt ist, ist hier nicht zu klären.

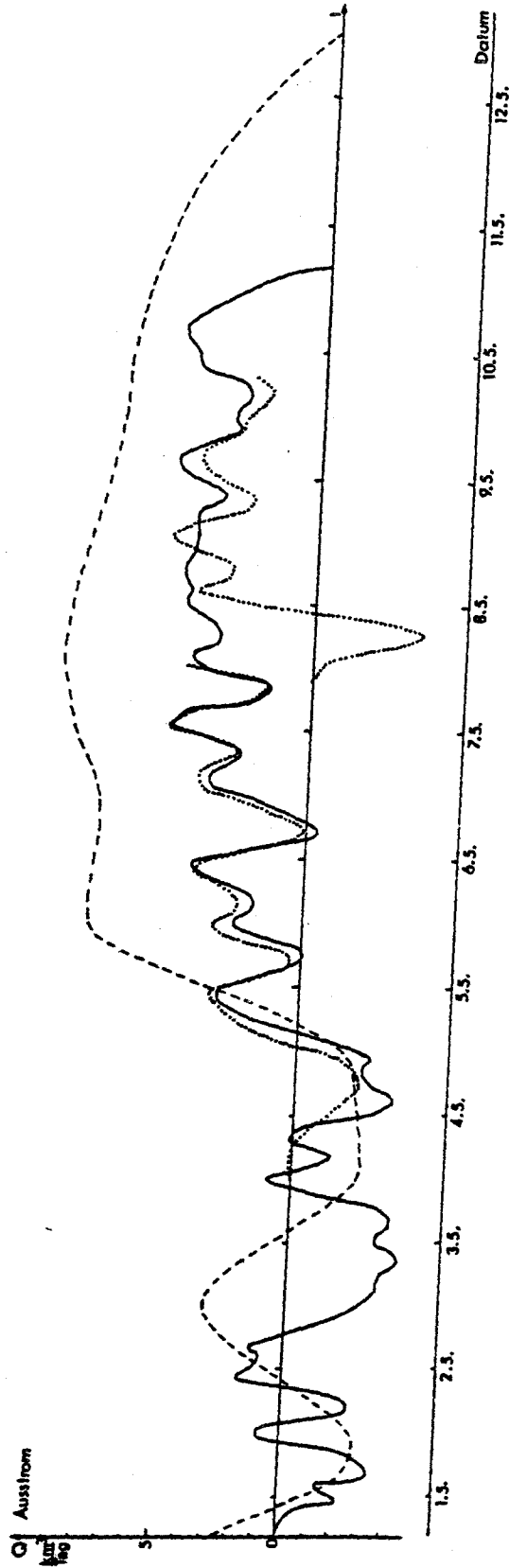


Abb. 48: Durchstrom Q durch den nördlichen Großen Belt in  $\text{km}^3/\text{Tag}$   
-----im Dänischen Beltprojekt gemessener Durchstrom  
———simulierter Durchstrom, Simulationszeitraum 30.4.-9.5.  
.....simulierter Durchstrom, Simulationszeitraum 3.5.-6.5.  
und 6.5.-8.5.



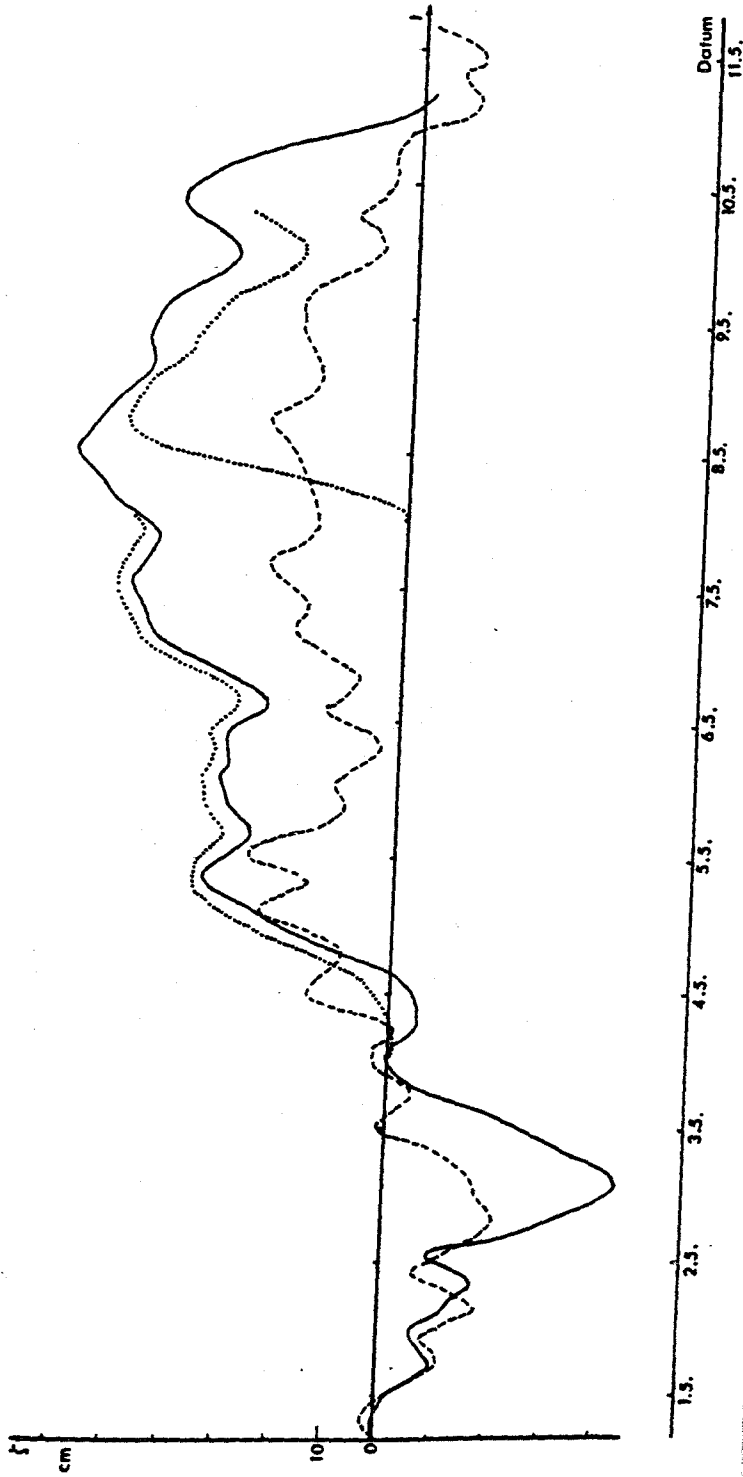


Abb. 49: Wasserstand bei Marienleuchte (Fehmarn) für verschiedene Zeitpunkte des Simulationsbeginnes.

----- gemessener Wasserstand

— simulierter Wasserstand, Simulationszeitraum 30.4.-9.5.

..... simulierter Wasserstand, Simulationszeitraum 3.5.-6.5.

und 6.5.-8.5.

#### 4.2.6. Untersuchung über Einstellzeiten

Anhand der in Abschnitt 4.2.5. beschriebenen Simulation der Kieler Bucht unter der Wirkung eines räumlich konstanten, zeitlich variablen Windfeldes soll untersucht werden, nach welcher Simulationszeit sich die "Vorgeschichte" im Strömungsverhalten der Kieler Bucht nicht mehr bemerkbar macht. Dazu wird an zwei Zeitpunkten während des Simulationszeitraumes vom 30. April bis 9. Mai vom Zustand der Ruhe aus mit der Simulation unter Wirkung des derzeitigen Windes begonnen.

Der erste Zeitpunkt ist der 3.5.1975, 12.00 Uhr. In Abb. 50, Kurve 3, ist der simulierte Wasserstand entlang des Längsschnittes K durch die Kieler Bucht vom Skagerrak bis ca. Bornholm für den Zeitpunkt 3.5.1972, 12.00 Uhr, dargestellt. Es herrschen zu dem Zeitpunkt keine großen Wasserstands differenzen. Abb. 48 zeigt, daß zu dem Zeitpunkt ein sehr geringer Durchstrom durch den nördlichen Großen Belt existiert, die Windgeschwindigkeit beträgt nur etwa 1 m/sec (Abb. 47); der Zustand der Ruhe ist also relativ gut erfüllt. Insofern verwundert es nicht, daß die Durchstrommenge durch den Großen Belt bei einer am 3.5.1972, 12.00 Uhr, beginnenden Simulation schon nach ca. 1 1/2 Tagen dem Durchstrom nach einer längeren Simulation sehr ähnlich ist (siehe Abb. 48). Die maximale Wasserstandsdifferenz im Längsschnitt Skagerrak - Bornholm hat sich, wie Abb. 51 zeigt, nach zwei Tagen eingependelt. Abb. 52 und 53 zeigen den Vergleich der Oberflächenströmungen der Simulationen ab 30. April und 3. Mai am 4. Mai, 17.00 Uhr. Die Simulation ab 3. Mai zeigt einen etwas stärkeren Ausstrom in dem Bestreben, die Wasserstandsdifferenzen zwischen Skagerrak und westlicher Ostsee auszugleichen; die Kieler Bucht selbst scheint unbeeinflußt, das gilt auch für die übrigen Schichten und den Volumentransport.

Der zweite Zeitpunkt des Simulationsbeginnes wurde so gelegt, daß größere Wasserstandsdifferenzen und Volumentransporte durch den Großen Belt existieren und stärkere Winde wirken, die Simu-

lierung wurde am 7.5., 12.00 Uhr, begonnen. Wenn auch hier am ersten Simulationstag das Durchstromverhalten durch den Großen Belt vom ab 30. April simulierten Fall entschieden abweicht, so sind doch auch hier - wie Abb. 48 und Abb. 49 zeigen - nur ca. 1 1/2 Tage nötig, die "Vorgeschichte" im Durchstrom durch den Großen Belt und im Wasserstandsverlauf bei Marienleuchte auszugleichen; der Absolutbetrag des Wasserstandes differiert um etwa 10 cm. Die maximale Wasserstandsdifferenz im Längsschnitt Skagerrak - westliche Ostsee braucht jedoch etwa 2 1/2 Tage, bis sie dem ab 30. April simulierten Fall entspricht (siehe Abb. 51). Sie ist zusammen mit dem derzeitigen Wind bestimmend für das Strömungsverhalten in den Belten, dieses wiederum für das Strömungsverhalten in der Kieler Bucht. Abb. 54 und Abb. 55 zeigen die Oberflächenströmungen des ab 30. April und des ab 7. Mai simulierten Falles am 8.5., 20.00 Uhr. Sie unterscheiden sich in der Kieler Bucht nicht, in den Belten ebenfalls kaum voneinander. Die Wasserstände, Abb. 56 und 57, unterscheiden sich nicht in der Struktur, nur im Absolutbetrag.

Stellt man in Rechnung, daß numerische Modelle meistens schneller auf Änderungen in der Anregung reagieren als die Natur, so kann man doch davon ausgehen, daß etwa zwei Tage ausreichen, in den Strömungen der Kieler Bucht die "Vorgeschichte" auszugleichen. Ein Ausgleich der Wasserstandsdifferenz zwischen Nord- und Ostsee kann jedoch längere Zeiten in Anspruch nehmen.

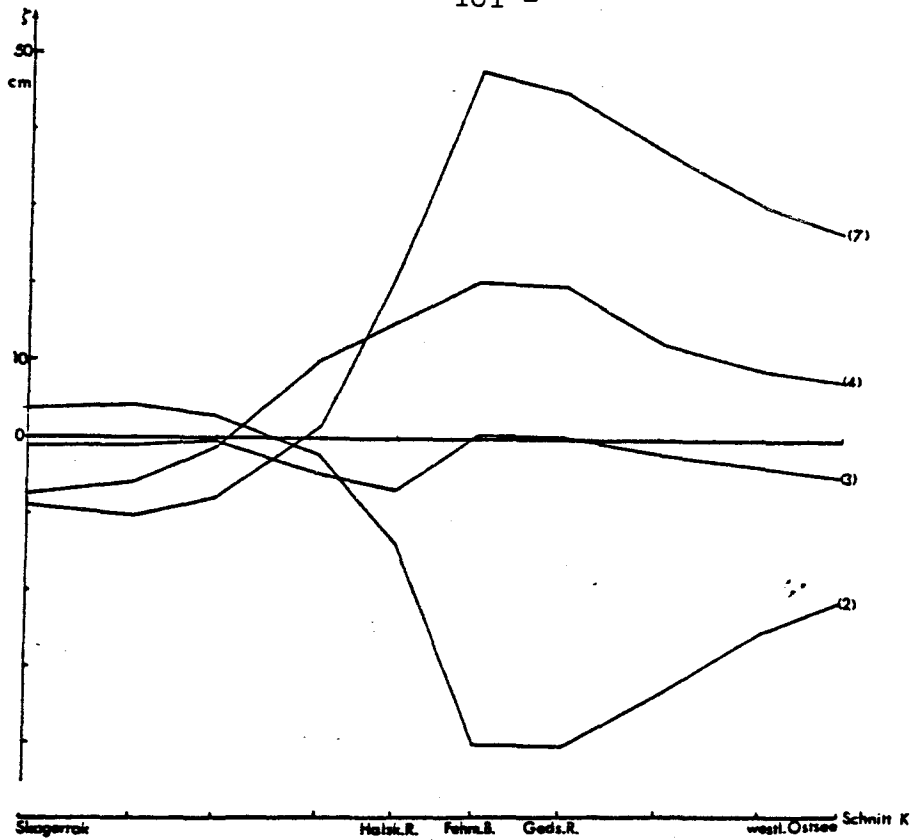


Abb. 50: Wasserstand  $h$  entlang des Schnittes K durch die Beltsee zu verschiedenen Zeitpunkten:

- (2) -2.5. 12.00 Uhr
- (3) -3.5. 12.00 Uhr
- (4) -4.5. 12.00 Uhr
- (7) -7.5. 12.00 Uhr

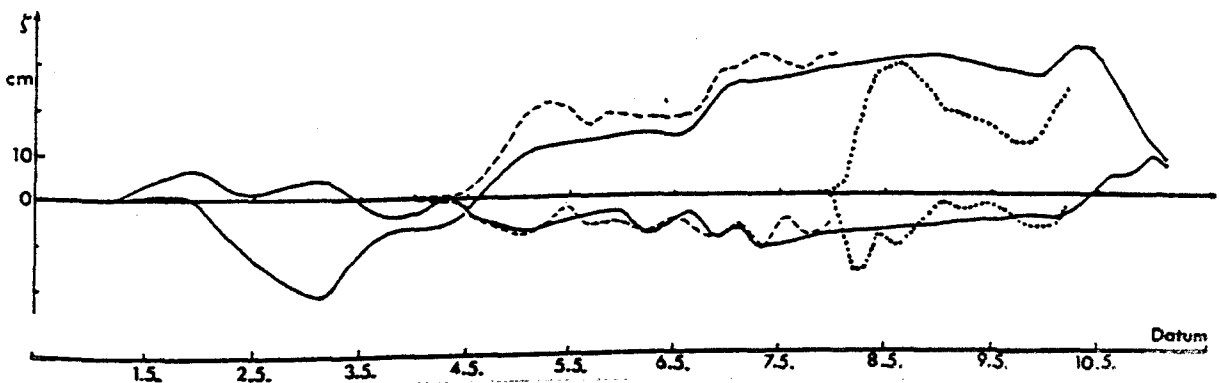


Abb. 51: Simulierte Wasserstands-differenz zwischen dem Skagerrak und der Ostsee für verschiedene Zeitpunkte des Simulationsbeginnes:

- 30.4. 17.00 Uhr
- 3.5. 12.00 Uhr
- ..... 7.5. 12.00 Uhr

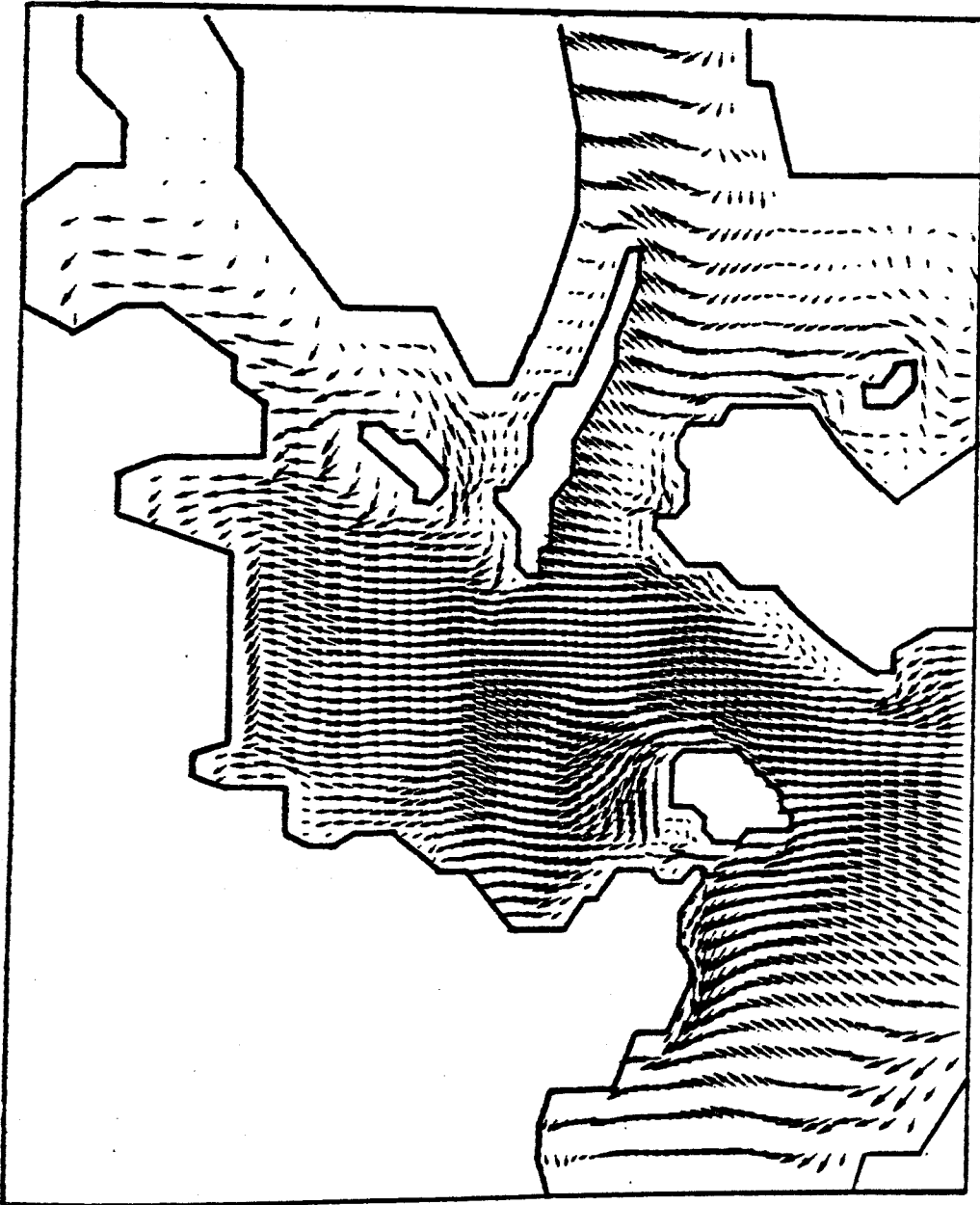


Abb. 52: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 1 (0 - 6 m)  
am 4.5. 17.00 Uhr,  
simuliert ab 30.4. 17.00 Uhr.  
→ := 20 cm sec<sup>-1</sup>

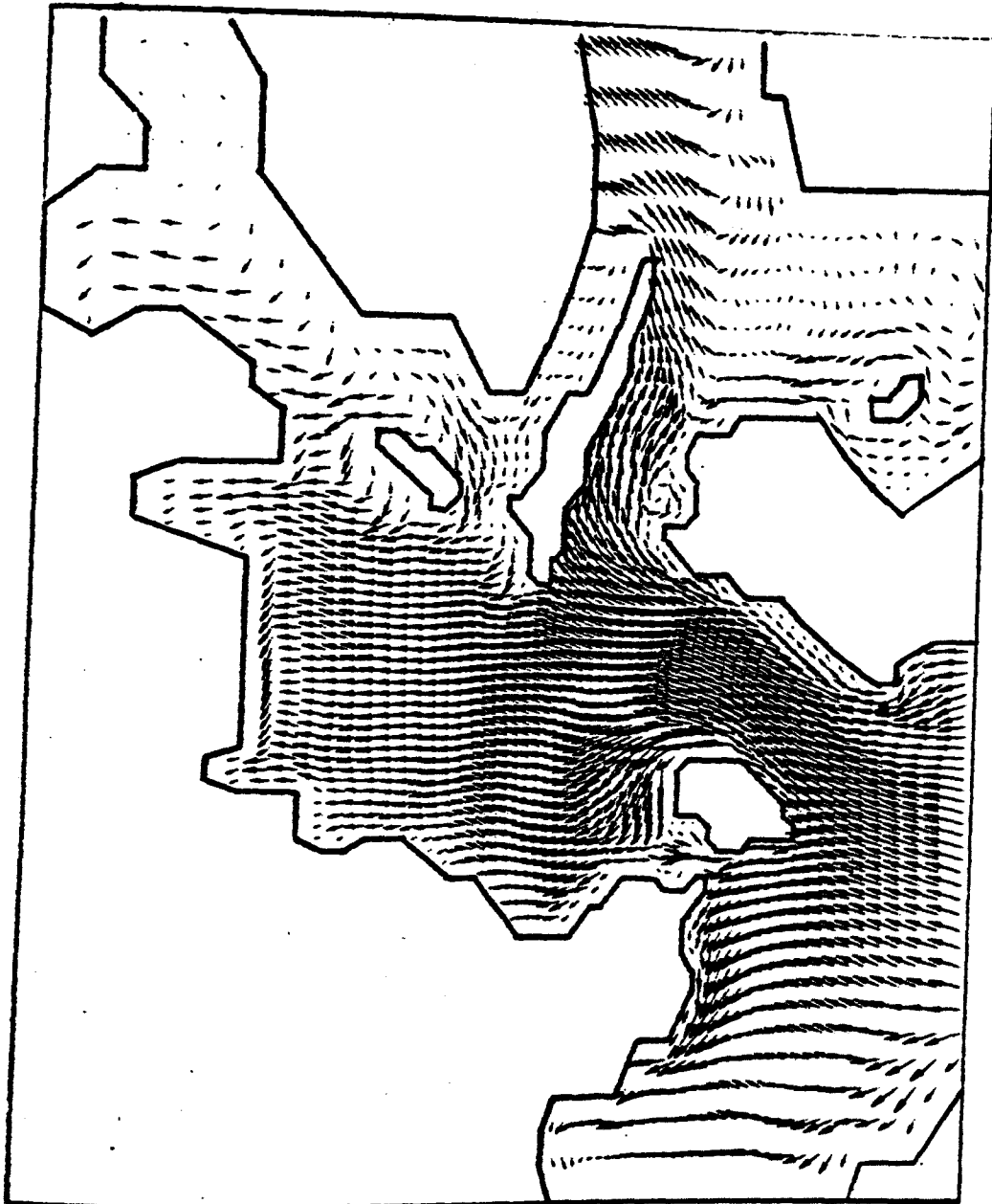


Abb. 53: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 1 (0 - 6 m)  
am 4.5. 17.00 Uhr,  
simuliert ab 3.5. 12.00 Uhr.  
—  $\approx 20 \text{ cm sec}^{-1}$

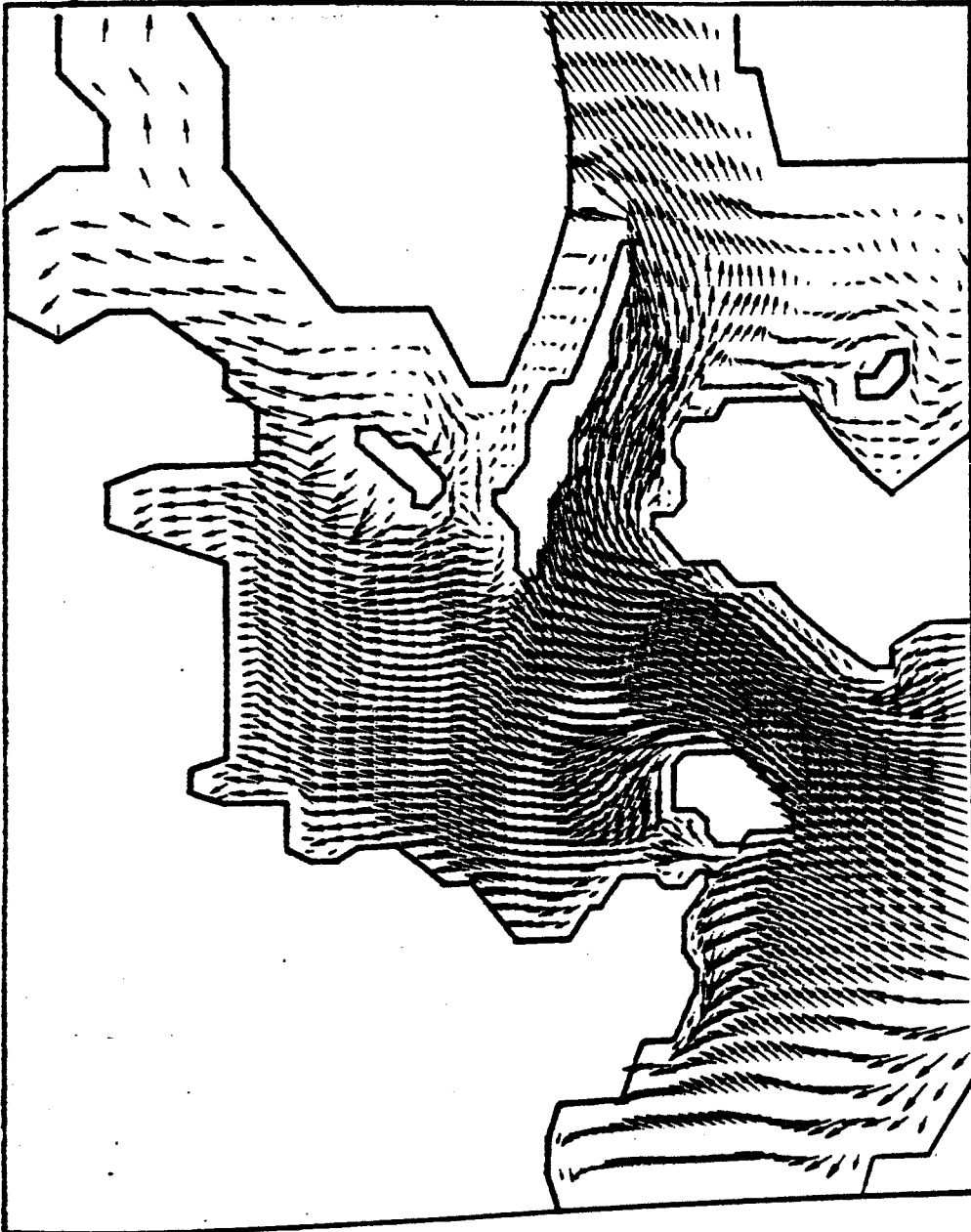


Abb. 54: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 1 (0 - 6 m)  
am 8.5. 20.00 Uhr,  
simuliert ab 30.4. 17.00 Uhr.  
→  $\approx 20 \text{ cm sec}^{-1}$



Abb. 55: Strömung der Kieler Bucht in Schicht 1 (0 - 6 m)  
am 8.5. 20.00 Uhr,  
simuliert ab 7.5. 12.00 Uhr.  
→  $\equiv 20 \text{ cm sec}^{-1}$



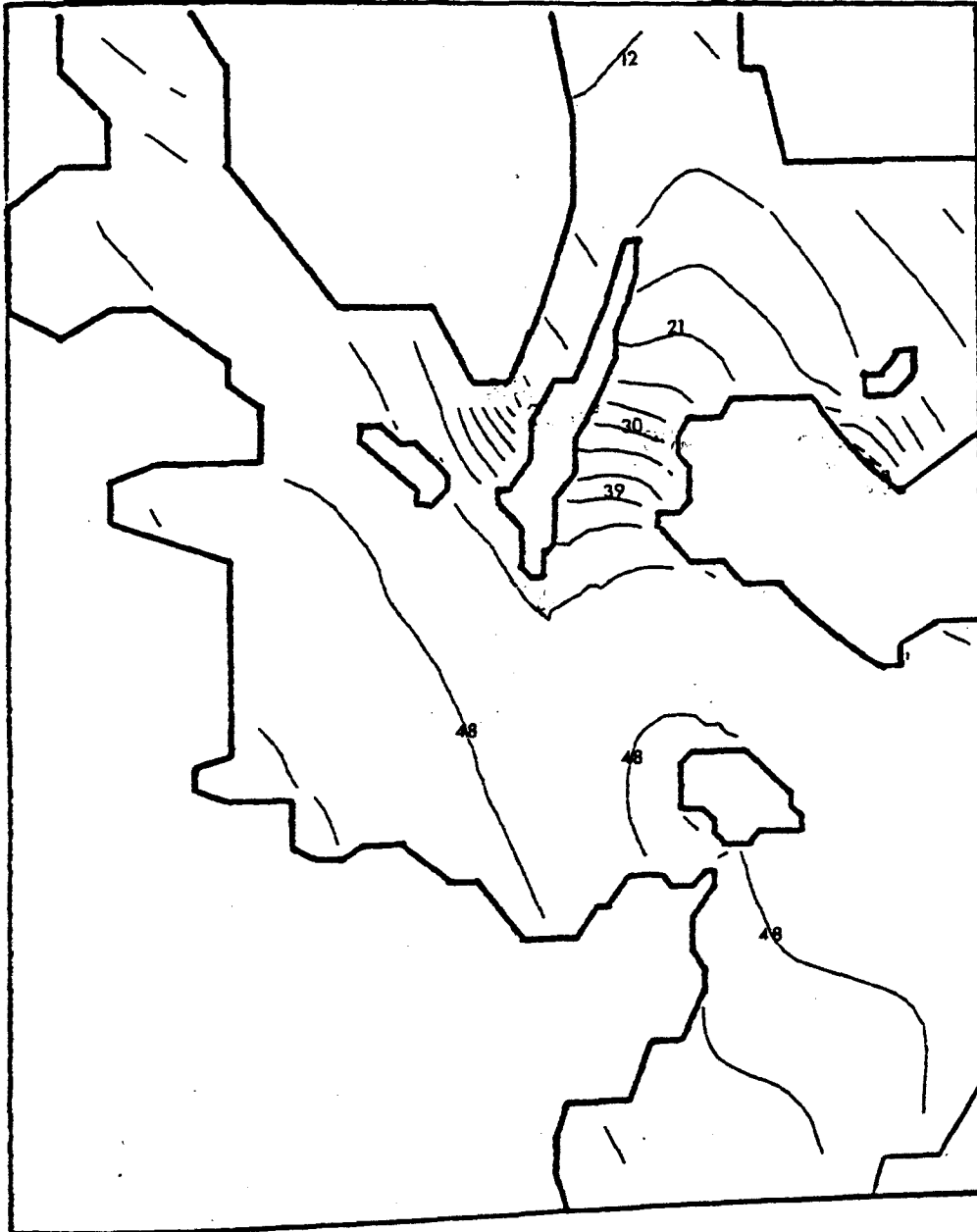


Abb. 56: Wasserstand in der Kieler Bucht in cm  
am 8.5. 20.00 Uhr,  
simuliert ab 30.4. 17.00 Uhr.

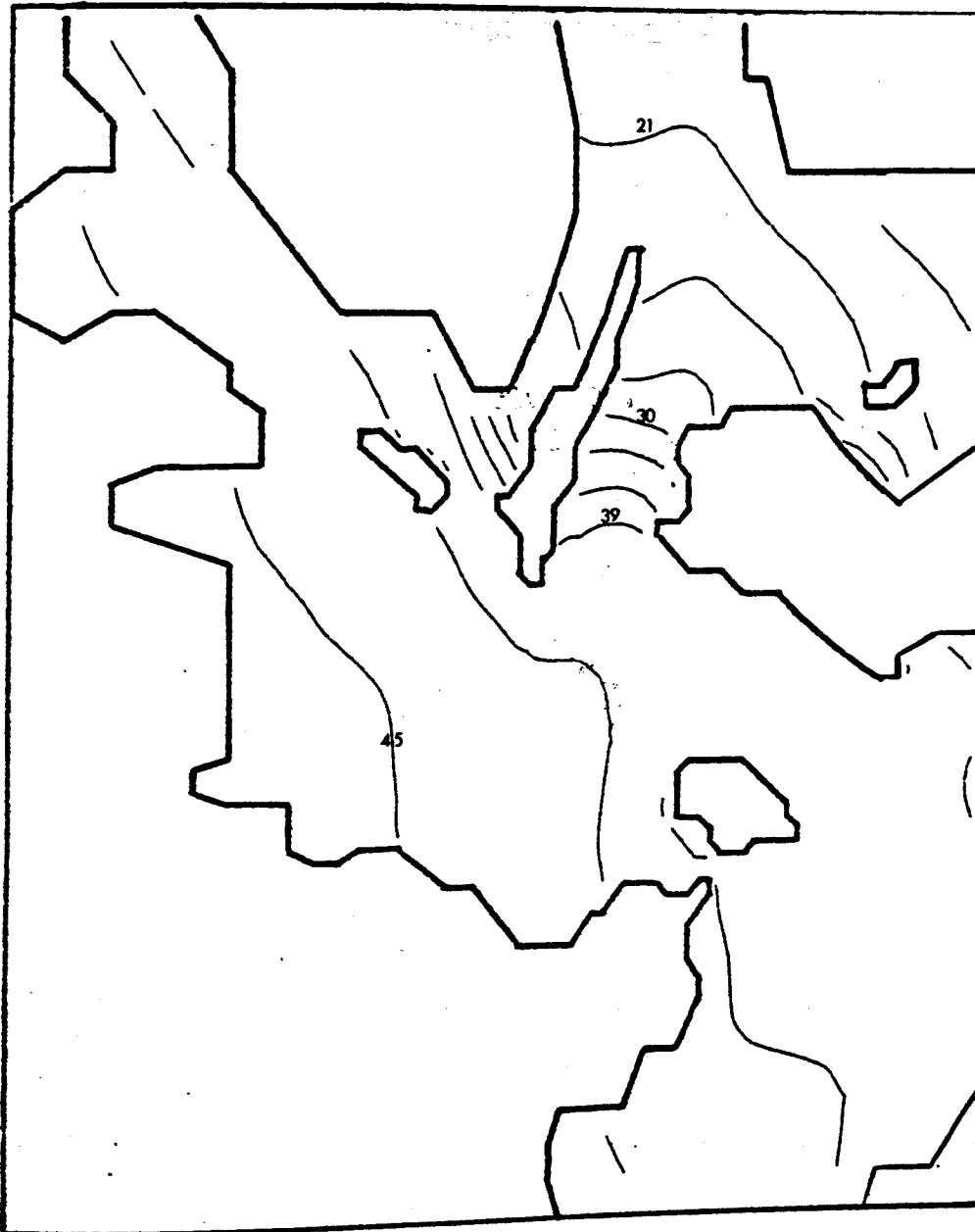


Abb. 57: Wasserstand in der Kieler Bucht in cm  
am 8.5. 20.00 Uhr,  
simuliert ab 7.5. 12.00 Uhr.

## 5. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSBETRACHTUNG

Da das Strömungsverhalten der Kieler Bucht sowohl vom lokalen Wind, als auch von der Reaktion des Systems Nordsee - Ostsee auf großräumige meteorologische Felder bestimmt wird, muß eine Modellierung den Einfluß des gesamten Systems beinhalten. Um andererseits die kleinskaligen Prozesse in der Kieler Bucht erfassen zu können, wurde ein Modell mit variabler horizontaler Auflösung entwickelt. Die Auflösung wird von 1,5 km in der Kieler Bucht auf 80 km in der nördlichen Ostsee verringert, die vertikale Auflösung beträgt vier Schichten. Das Modell ist ein Finite-Differenzen-Modell mit realistischer Bodentopographie im abgeschlossenen Becken.

Die Strömungen in den Belten werden mit zeitlich und räumlich konstanten Windanregungen für verschiedene Windrichtungen berechnet.

Der Volumentransport bzw. die mittlere Strömung der Kieler Bucht zeigt drei topographisch bedingte Wirbel, die je nach Strömungsrichtung in den Belten unterschiedliche Drehrichtung haben. Für Ostwind herrscht Ausstrom aus der Ostsee, für Westwind Einstrom, der quasistationäre Zustand wird schon nach etwa einem Tag erreicht. Bei Süd- und Nordwind wechseln Ein- und Ausstromlagen etwa drei Tage lang, bis sich für Südwind Einstrom und für Nordwind Ausstrom einstellt.

In einem weiteren Beispiel wird mit einem räumlich konstanten, zeitlich variablen Windfeld angeregt. Es wird der während BALTIC '75 gemessene Wind bei Bornholm im gesamten Gebiet wirken lassen. Der Durchstrom durch die Belte stimmt mit gemessenen Werten in der Amplitude nicht befriedigend überein; die Ursache könnte in der unrealistischen räumlichen Konstanz des Windfeldes liegen. In dem Beispiel wird gezeigt, daß je nach Ausgangssituation ein bis drei Tage nötig sind, die "Vorgeschichte", z.B. einen aufgebauten Wasserstau in der Beltregion, auszugleichen.

Eine Erweiterung des Modells auf räumlich und zeitlich variable

Windfelder würde keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereiten. Man könnte von den stark idealisierten konstanten Windfeldern auf z.B. typische Wetterlagen übergehen oder statistische Aussagen anhand der Simulation vieler Einzelereignisse machen. Die Simulation von punktförmigen Strömungsmessungen in numerischen Modellen ist jedoch problematisch.

Eine sinnvolle Erweiterung wäre die Hinzunahme der nichtlinearen Terme in den Impulsgleichungen, da gerade die Erzeugung und Abschnürung kleinskaliger Wirbel, wie sie in der Kieler Bucht beobachtet werden, auf nichtlinearen Effekten beruhen. Will man Aussagen über die Salzausbreitung in der Beltsee und der Ostsee über längere Zeit als nur einige Tage erreichen, so muß auf die horizontale Anfangsdichteschichtung verzichtet und ein Adoptionsmodell vorgeschaltet werden.

## 6. BENUTZTE PROGRAMME

Alle Modellprogramme wurden selbst entwickelt und an der PDP 10 des Rechenzentrums der Universität Kiel gerechnet. Da nicht alle Variablen gleichzeitig im Kernspeicher gespeichert werden konnten, wurden sie in einem eindimensionalen Feld binär gespeichert und für jede x-Komponente zeilenweise eingelesen und nach der Operation wieder gespeichert. Die entsprechenden Parameter zur Festlegung der Grenzen berechnet ein Vorprogramm aus dem Tiefenfile. Die Prozedur des Wegspeicherns und Einlesens benötigt einige Rechenzeit, erlaubt aber, das Programm an der KL der PDP 10 mit 83 Kcore zu rechnen. Das Verhältnis von Realzeit zu Rechenzeit beträgt Realzeit/CPU-Zeit = 8,2/1.

Zur Darstellung der Ergebnisse, dem Plotten von Geschwindigkeitsvektoren und Isolinien wurde das Systemprogramm PLVEIS benutzt, es wurde in einigen Fällen lediglich durch eine Subroutine zur Transformation der Koordinaten ergänzt.

## LITERATURVERZEICHNIS

- BIRCHFIELD, G.E. und B.P. HICKIE, 1977: The time-dependent response of a circular basin of variable depth to a wind stress. J. Phys. Oceanogr. 7, 691-701
- BOOK, D.L., J.P. BORIS und K. HAIN, 1975: Flux-corrected transport II. Generalisation of the method. J. Comp. Phys. 18, 248-283
- BORIS, J.P. und D.L. BOOK, 1976: Flux-corrected transport III. Minimal-error FCT algorithms. J. Comp. Phys. 20, 397-431
- BRETTSCHEIDER, 1967: Anwendung des Hydrographisch-Numerischen Verfahrens zur Ermittlung der M2-Mitschwingungszeit der Nordsee. Mitt. Inst. f. Meeresk., Hamburg VII
- GROWING, G., H.O. KREISS und J. OLIGER, 1973: Mesh Refinement. Math. Comp. 27, 29-39
- DIETRICH, G., 1951: Oberflächenströmungen im Kattegat, im Sund und in der Beltsee. Dt. hydrogr. Z. 4, 129-150
- DIETRICH, G. und F. SCHOTT, 1974: Wasserhaushalt und Strömungen. In: Meereskunde der Ostsee, Ed. L. Magaard und G. Rheinheimer, Springer, Heidelberg, 269 pp.
- DIETRICH, G. und KÜSTER, 1974: Geschichte der Ostsee. In: Meereskunde der Ostsee, Ed. L. Magaard und G. Rheinheimer, Springer, Heidelberg, 269 pp.
- EHRHARDT, O., 1978: Das Klima der Kieler Bucht, Diplomarbeit, Kiel
- FROMM, J.E., 1968: A method for reducing dispersion in convective difference schemes. J. Comp. Phys. 3, 179-189
- HARDTKE, G., 1978: Triftkörpermessungen in der Kieler Bucht. Proceed. of the 11. Conf. of Baltic Oceanogr., Rostock, Vol. 2, 756 ff
- HORSTMANN, U. und P.G. HARDTKE, 1981: Transport processes of suspended matter, including phytoplankton, studied from LANDSAT; images of the Southwestern Baltic Sea. In: Oceanography from Space, Ed. J.F.R. Gower, Plenum Publ. Corpor.
- JACOBSEN, T., 1976: Praeliminaere transport beregninger i Store Bælt, Bælt projektet, Fysiske Undersøgelser
- JACOBSEN, T.S., 1980: Sea water exchange of the Baltic, Measurements and methods. Nat. Agency Environm. Prot. Denmark

- KALNAY de RIVAS, E., 1972: On the use of nonuniform grids in finite-difference equations. J. Comp. Phys. 10, 202-210
- KIELMANN, J., J. HOLTORFF und U. REIMER, 1976: Data report BALTIC '75. Ber. Inst. f. Meeresk., Kiel, Nr. 2
- KIELMANN, J. und A.S. KOWALIK, 1980: A bottom stress formulation for storm surge problems. Oceanologica acta, 3, 51-58
- KIELMANN, J., 1981: Grundlagen und Anwendung eines numerischen Modells der geschichteten Ostsee. Ber. Inst. f. Meeresk., Kiel, 87a, 87b
- KOHLMANN, R., 1905: Beiträge zur Kenntnis der Strömungen der westl. Ostsee. Wiss. Meeresunt. Abt. Kiel, Bd. VIII
- KOWALIK, A.S., 1976: Water exchange between the Baltic and the North Sea based on barotropic model. Acta Geophysica Polonica
- KRAUSS, W., 1973: Methods and results of theoretical oceanography I. Gebr. Borntraeger, Berlin
- LANGE, W., 1975: Zu den Ursachen langperiodischer Strömungsänderungen im Fehmarnbelt. Kieler Meeresf. 31: 65-81
- LI, H.W., 1977: Ein Mehrschichtenmodell für die windbedingten Strömungen in der Kieler Bucht, Dissertation, Kiel
- MACHENS, R., 1949: Zur Frage der Zirkulation in der Kieler Bucht. Schriften des Naturwissenschaftlichen Vereins Schleswig-Holstein, 24(1), 82-92
- MATSUNO, T., 1966: False reflection of waves at the boundary due to the use of finite differences. J. Meteor. Soc. Japan, II, 145-157
- MESINGER, F. und A. ARAKAWA, 1976: Numerical methods used in atmospheric Models. GARP Publ. Ser. No. 17(I), WMO-ICSU JOC
- MILLERO, F.J. und K. KREMLING, 1976: The densities of Baltic Sea waters. Deep-Sea Res. 23, 1129-1138
- PHILLIPS, N.A. und J. SHUKLA, 1973: On the strategy of combining coarse and fine grid meshes in numerical weather prediction. J. Appl. Meteor, 12, 763-770
- PEDLOSKY, J., 1979: Geophysical fluid dynamics, Springer-Verlag, Heidelberg.
- RICHTMYER, R.D. und K.W. MORTON, 1957: Difference methods for initial-value problems. Interscience publishers, N.Y.

- ROACHE, P.J., 1972: Computational fluid dynamics. hermosa publishers, Albuquerque
- SCHOTT, F. et al., 1976: On measurements of horizontal mass and momentum transfer in small scales during "BALTIC '75". Inst. f. Meeresk., Kiel
- SIEDLER, G. und G. HATJE, 1974: Temperatur, Salzgehalt und Dichte. In: Meereskunde der Ostsee, Ed. L. Magaard und G. Rheinheimer, Springer-Verlag, Berlin, 269 pp.
- SIMONS, T.J., 1973: Development of three-dimensional numerical models of the Great Lakes. Sci. Ser. No. 12, Canada Centre for Inland Waters, Burlington/Ont.
- SIMONS, T.J., 1976: Topographic and baroklinic circulation in the Southwest Baltic. Berichte aus dem Inst. f. Meeresk., Nr. 25, Univ. Kiel
- STANIFORTH, A.N. und H.L. MITCHELL, 1978: A variable-resolution finite-element technique for regional forecasting with the primitive equations. Mon. Wea. Rev., 106, 439-447
- STRUVE, S., 1978: Transport und Vermischung einer passiven Beimengung in einem Medium mit einem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld. Ber. Inst. Meeresk., Nr. 57
- SONDERMANN, 1966: Ein Vergleich zwischen der analytischen und numerischen Berechnung winderzeugter Strömungen und Wasserstände in einem Modellmeer mit Anwendungen auf die Nordsee. Mitt. Inst. Meeresk., Hamburg IV
- SUNDSTRÖM, A. und T. ELVIUS, 1979: Computational problems related to limited area modeling in numerical methods used in atmospheric models. GARP Publ.Ser. No. 17 (II) WMO-ICSU JOC
- THIEL, G., 1943: Einiges über die Ergebnisse von Strombeobachtungen in der westlichen Ostsee. Annalen Hydrogr. u. Marit. Meteorol.
- WYRTKI, K., 1953: Die Dynamik der Wasserbewegung im Fehmarnbelt I. Kieler Meeresforsch. 9, 155-170
- WYRTKI, K., 1954: Die Dynamik der Wasserbewegung im Fehmarnbelt II. Kieler Meeresforsch. 10, 162-181
- ZENK, W. et al., 1979: Bodenströmungen und Schichtungsverhältnisse in der nördlichen Kieler Bucht im März 1978. Ber. Inst. Meeresk., Nr. 69

## DANKSAGUNG

Für die Vergabe und Betreuung der vorliegenden Arbeit danke ich meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. W. Krauß. Meinen Kollegen in der Abteilung Theoretische Ozeanographie danke ich für ihre Hilfe, das gilt besonders für Herrn Dr. Erich Bäuerle, Herrn Chresten Wübbert, Herrn Dr. Jürgen Kielmann und Herrn Jürgen Holtorff.

Für die Ermöglichung der umfangreichen Modellrechnungen bedanke ich mich bei den Mitarbeitern des Rechenzentrums der Universität Kiel.